ARBEITSUNTERLAGEN

ZUR
VORLESUNG UND ÜBUNG
AN DER
UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

MATHEMATIK

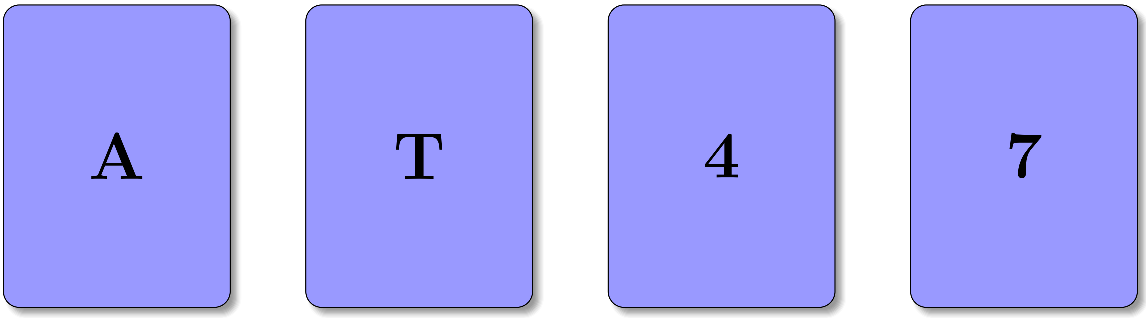
GRUNDLAGEN&ANWENDUNGEN

im
SS 2018

1. Aufgabe (Logik)

a) Paul sagt: »Max lügt.« Max sagt: »Otto lügt.« Otto sagt: »Max und Paul lügen.«
Wer lügt? Wer sagt die Wahrheit?

b) Vor Ihnen liegen vier Karten. Jede Karte hat auf einer Seite einen Buchstaben und auf der anderen Seite eine Zahl (siehe nachfolgende Graphik).



Unsere Hypothese lautet: »Wenn sich ein Vokal auf der einen Seite befindet, dann steht auf der anderen Seite eine gerade Zahl.« Sie sollen diese Hypothese überprüfen und dürfen dazu zwei Karten umdrehen. Welche sehen Sie sich an?

2. Aufgabe (Logik)

Untersuchen Sie die folgenden Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt (Begründung!):

a) $\exists a\in\mathbb{Q}\ \exists b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}:\ a+b\in\mathbb{Q}$

b) $\exists a\in\mathbb{Q}\ \exists b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}:\ a\cdot b\in\mathbb{Q}$

c) $\exists a\in\mathbb{R}:\ (a^2\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\ \wedge\ a^4\in\mathbb{Q})$

d) $\exists a,b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}:\ (a+b\in\mathbb{Q}\ \wedge\ a\cdot b\in\mathbb{Q})$

3. Aufgabe (Logik, Tautologie)

a) Geben Sie eine Wahrheitswertetabelle für die Aussagenverbindung $(p\to q)\wedge\bar{q}\to\bar{p}$ an.

b) Bei welchen der folgenden Ausdrücke handelt es sich um Tautologien?

A: $p\wedge(p\to q)\to q$

B: $(p\vee q)\to\bar{p}$

C: $(\bar{q}\vee p)\leftrightarrow(\bar{p}\leftrightarrow\bar{q})$

c) Seien p,q,r,s,t Aussagen. Untersuchen Sie, ob die folgenden beiden Aussagenverbindungen A_1 und A_2 logisch äquivalent sind.

$$A_1 := \bar{p}\vee(s\wedge t)\vee(\bar{s}\wedge\bar{t})\vee q\to r\ ,\qquad A_2 := ([p\to(s\leftrightarrow t)]\to r)\wedge(q\to r)$$

d) Herr Maier hat strenge Essgewohnheiten zum Mittagessen.

- Wenn er Blumenkohl isst, isst er keine Erbsen

- Wenn er Kartoffeln isst, isst er auch Erbsen
- wenn er keine Kartoffeln isst, isst er Eis zum Nachtisch, sonst Kompott

Stellen Sie diese drei Aussagen symbolisch dar und begründen Sie dann formallogisch, welchen Nachtisch Herr

4. Aufgabe (Logik)

„Die Wettervorhersage gefällt mir nicht", wetterte der Intendant. „Jeden Tag schreiben uns Tausende von Fernsehzuschauern, dass sie wieder nicht gestimmt hat. Außerdem ist die Prognose zu kompliziert. Die Leute wollen nur wissen, ob es warm oder kalt sein wird, ob es regnen wird oder nicht, windig oder windstill sein wird, ob hohe oder niedrige Luftfeuchtigkeit zu erwarten ist - basta."

Doktor Hochtief nahm sich dies zu Herzen. Noch am selben Abend erklärte er den Zuschauern, von nun an würden sie die neue „implikative Vorhersage" erhalten, der lediglich die vom Intendanten als ausreichend befundenen vier Angaben zu entnehmen seien. Und sogleich begann Dr. Hochtief mit der Wettervorhersage der neuen Art:

„Wenn morgen kein Niederschlag fällt, wird es entweder kalt oder windstill sein. Ist es morgen jedoch kalt, dann wird es Niederschläge und eine hohe Luftfeuchtigkeit geben. Ist es morgen entweder windig oder niederschlagsfrei, dann wird es kalt sein. Falls es morgen regnet, ist mit hoher Luftfeuchtigkeit zu rechnen. Ist es morgen jedoch windstill, wird die Luftfeuchtigkeit niedrig sein."

Kaum hatte Hochtief seine Vorhersage beendet, wurde er ans Telefon gerufen. „Was war denn das für ein Quatsch", brüllte der Intendant. „Sie sollten es doch einfacher, nicht komplizierter machen. Sie sind gefeuert!"

Das war ungerecht. Denn der Meteorologe hatte doch lediglich vorhergesagt, was der Intendant hören wollte. Vor allem hat Dr. Hochtief recht gehabt. Wie war das Wetter am folgenden Tag?

5. Aufgabe (Logik, Beweise)

a) Es seien p, q, r ungerade ganze Zahlen. Beweisen Sie, dass die Gleichung $px^2 + qx + r = 0$ keine rationale Lösung besitzt.

   Hinweis: Gehen Sie von einer teilerfremden Lösung der Form $x=\frac{m}{n}$ mit $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$ aus und unterscheiden Sie alle möglichen Kombinationen der Fälle „m bzw. n gerade/ungerade"!

b) Beweisen Sie die Gleichung

$$\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}|a - b|.$$

c) Äußern Sie sich zu folgender Rechnung!

$$\ln(x^2)=0 \iff 2\ln(x)=0 \iff \ln(x)=0 \iff x=1$$

d) Wir behaupten

$$\forall n\in\mathbb{N} : 2n-1 \leqslant 2^{n-1},$$

   und beweisen diese Aussage durch vollständige Induktion:

   - Induktionsanfang: Für $n=1$ ist $2n-1 = 1 = 2^0$.

- Induktionsannahme: Die Behauptung sei bewiesen für ein $m \in \mathbb{N}$.
- Induktionsschritt:

$$2(m+1)-1 \;=\; (2m-1)+2 \;\leqslant\; 2^{m-1}+2 \;\leqslant\; 2^{m-1}+2^{m-1} \;=\; 2^m.$$

- Also gilt die Behauptung für alle natürlichen Zahlen.

i) Überprüfen Sie die Gültigkeit der Aussage für $n = 1, 2, 3, 4$.

ii) Finden Sie den Fehler in obigem Induktionsbeweis.

e) Wir behaupten: »Für alle natürlichen Zahlen n ist $n^2 - 79n + 1601$ eine Primzahl!« Beweisen oder widerlegen Sie diese Aussage!

f) Berechnen Sie für einige natürliche Zahlen n die Summe $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k$. Finden Sie dann eine Summenformel und beweisen diese.

6. Aufgabe (Vollständige Induktion, Binomischer und Polynomischer Lehrsatz)

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ ist der **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k}$ definiert durch[1]

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{für} \quad 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{für} \quad n < k \text{ oder } k < 0 \end{cases}$$

a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$.

i) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

iii) $\sum\limits_{j=0}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

Interpretieren Sie die Aussagen ai) – aiii) im **Pascalschen Dreieck**.

b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion den **Binomischen Lehrsatz**.

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

c) Erläutern Sie die folgende Form binomischen Lehrsatzes:

$$(a+b)^n = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=n}}^{n} \frac{n!}{i!j!} \cdot a^i b^j$$

Bemerkung: $\sum\limits_{\substack{i,j=0 \\ i+j=n}}^{n}$ ist die Kurzform von $\sum\limits_{\substack{i=0 \\ i+j=n}}^{n} \sum\limits_{j=0}^{n}$

[1] Man beachte hierbei, dass $0!=1$ definiert ist.

d) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion nach der Zahl r der Summanden und unter Verwendung von Teil c) den **polynomischen Lehrsatz**:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_r)^n = \sum_{\substack{k_1, k_2, \cdots, k_r = 0 \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n}}^{n} \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!} \cdot a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_r^{k_r}$$

Bemerkung: Die Größen $\frac{n!}{k_1! \cdots k_r!}$ heißen **Polynomial-** oder **Multinomialkoeffizienten**.

e) Seien ℓ, m und n natürliche Zahlen. Überprüfen Sie die Gleichung

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n}{k} \cdot \binom{m}{\ell - k} = \binom{n+m}{\ell}$$

für ℓ=2, n=3, m=4. Beweisen Sie anschließend Gleichung (1)!

7. Aufgabe (Rentenfaktoren)

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Rentenendwertfaktoren!

a) Für alle $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ mit $k \geqslant \ell$ gilt: $s_k(x) - s_\ell(x) = x^\ell \cdot s_{k-\ell}(x)$.

b) Für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$ und $x \geqslant 1$ gilt: $s_\ell(x) \geqslant \ell$.

c) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geqslant n$ und $x \geqslant 1$ gilt: $n \cdot s_m(x) \geqslant m \cdot s_n(x)$.

8. Aufgabe (Mengenlehre)

a) Während eines Plauderstündchens bei einer Tasse Kaffee im „Klub der Intergalaktischen Reisenden“ erzählte sein prominentestes Mitglied, der Münchhausen des kosmischen Zeitalters, John Tichy[2] die folgende Geschichte: »Die Landung auf dem Planeten Hesiod war sehr schwierig. Als ich mich jedoch seiner Oberfläche näherte, da bedauerte ich sehr, den Abstieg überhaupt eingeleitet zu haben. Ich konnte Wesen beobachten, die noch weit schauerlicher anzusehen waren als die in der Mythologie beschriebenen Ungeheuer. Bald näherte sich mir eine Delegation von 100 Bewohnern des Planeten. 56 von ihnen besaßen nur ein Auge mitten auf der Stirn wie vormals der Riese Polyphem, 57 von ihnen trugen an Stelle der Haare Schlangen wie Medusa, 58 hatten eine Sonnenbank-gegerbte Haut wie einst der Sänger von Modern Balking. Im Gegensatz zu den als Vergleich genannten Ungeheuern der griechischen und deutschen Sagen waren verschiedene Bewohner dieses Planeten gleichzeitig durch zwei dieser Merkmale verunstaltet. So waren 23 von ihnen einäugig und schlangenhäuptig, 24 Einäugige und 25 Schlangenhäupter hatten gegerbte Lederhaut. Ausgerechnet einer der beiden Bewohner, die mit allen der drei genannten Merkmale ausgestattet waren, wandte sich an mich. …«

Aber die Mitglieder des Klubs erfuhren genauso wenig wie wir, was John Tichy auf dem Planeten der Ungeheuer weiter erlebt hatte, denn kaum war er mit seiner Erzählung bis hierher gekommen, da schaute ihn der Mathematik beflissene Weltraumbummler Klaus Brubaker mitleidsvoll an, und sagte: »Lieber John! Ich will Dir gerne glauben, dass es

[2] Siehe „Sterntagebücher“ von Stanislaw Lem.

auf dem Planeten Wesen mit einem Auge, mit Medusenhäuptern und einer Haut zäh wie Kautschuk gibt. Aber die Gesetze der Mathematik gelten sicherlich auch auf Hesiod. ...«

Auf welchen Fehler in seiner Erzählung hat Klaus Brubaker John Tichy aufmerksam gemacht?

b) Eine vom Max-Planck-Institut für Geflügel-Wissenschaften in Auftrag gegebene Studie über die Akzeptanz der $1\frac{1}{2}$-Eier-Hühner liefert folgende Ergebnisse:

„Von den deutschen Betriebswirten lieben 70% Enten, 65% mögen Puten und 40% sowohl Enten als auch Puten. 15% mögen sowohl Puten als auch $1\frac{1}{2}$-Eier-Hühner und ebensoviele haben sich gleichzeitig für Enten und $1\frac{1}{2}$-Eier-Hühner entschieden. 10% lieben alle 3 Geflügelsorten."

Wie hoch ist unter den deutschen Betriebswirten der Prozentsatz der Liebhaber von $1\frac{1}{2}$-Eier-Hühnern?

9. Aufgabe (Mengenlehre, Relationen)

a) Für eine Menge A, heißt $\mathscr{P}\subset\wp(A)$ eine *Zerlegung* von A, wenn gilt:

(P1) Alle Mengen aus $\mathscr{P}$ sind nichtleer.

(P2) Je zwei verschiedene Mengen aus $\mathscr{P}$ sind disjunkt.

(P3) Die Mengen aus $\mathscr{P}$ bilden eine Überdeckung von A, d.h. $\bigcup\limits_{P\in\mathscr{P}} P = A$.

i) Für eine Äquivalenzrelation $\sim$ in A bezeichne $A/_{\sim}$ die Menge aller Äquivalenzklassen. Zeigen Sie, dass $A/_{\sim}$ eine Partition von A ist.

ii) $\sim$ sei die durch

$$a \sim b \overset{\text{Def.}}{\iff} a-b \text{ ist durch 5 teilbar}$$

in $\mathbb{Z}$ definierte Äquivalenzrelation. Geben Sie $\mathbb{Z}/_{\sim}$ an.

iii) Für eine Partition $\mathscr{P}$ der Menge A, definiere man die Relation $\sim$ durch:

$$a \sim b \overset{\text{Def.}}{\iff} \exists P\in\mathscr{P} : a\in\mathscr{P} \wedge b\in\mathscr{P}$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation in A ist.

iv) Es seien A die Menge $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ und $\mathscr{P} := \Big\{\{1\};\{2,3,4\};\{5,6\};\{7\}\Big\}$ eine Partition von A. Geben Sie die zu $\mathscr{P}$ gehörende Äquivalenzrelation auf A an.

b) Seien $R_1, R_2, R_3, \ldots$ Äquivalenzrelationen in einer Menge M. Zeigen Sie, dass dann auch der Durchschnitt $R := \bigcap\limits_i R_i$ eine Äquivalenzrelation in M ist. Gilt dies auch für Präferenzrelationen?

10. Aufgabe (Relationen, Ordnung)

Wir betrachten einen Konsumenten, der Güterbündel $\boldsymbol{x} = (b, c)$ konsumiert $(b, c > 0)$. b und c geben dabei die Menge an Bier bzw. Chips an, aus denen sich das Güterbündel zusammensetzt. Der Konsument präferiert Güterbündel $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ dem Güterbündel $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ und wir schreiben $\boldsymbol{u}\succcurlyeq\boldsymbol{v}$ genau dann, wenn gilt:

$$u_1 \cdot u_2 \geqslant v_1 \cdot v_2$$

Die Relationen $\sim$ (*Indifferenz*) und $\succ$ (*starke Präferenz*) sind definiert durch:

$$\begin{aligned} x \sim y &\overset{\text{Def.}}{\iff} (x \succcurlyeq y) \wedge (y \succcurlyeq x) \\ x \succ y &\overset{\text{Def.}}{\iff} (x \succcurlyeq y) \wedge (x \nsim y) \end{aligned}$$

a) Für welche Güterbündel $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ gilt $\boldsymbol{u} \succ \boldsymbol{v}$ bzw. $\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{v}$?

b) Zeichnen Sie alle Güterbündel, die der Konsument dem Güterbündel $(2, 1)$ präferiert bzw. strikt präferiert in das gleiche Diagramm ein. Skizzieren Sie außerdem die „*Indifferenzmenge*" zum Güterbündel $(2, 1)$.

c) Sei der Konsument zwischen den Güterbündeln $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ indifferent, d.h. gelte $\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{v}$ und sei $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$. Zeigen Sie, dass für alle $t \in \,]0, 1[$

$$t \cdot \boldsymbol{u} + (1-t) \cdot \boldsymbol{v} \succ \boldsymbol{u}$$

gilt und verdeutlichen Sie dies in ihrem Diagramm.

11. Aufgabe (Supremum, Infimum)

Für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Mengen

$$M_n := \left\{ (1 - \tfrac{1}{2^k}) \cdot (-\tfrac{3}{n})^\ell \mid k, \ell \in \mathbb{N}_0 \right\} .$$

a) Bestimmen Sie die $n \in \mathbb{N}$, für die M_n beschränkt ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Berechnen Sie für die n aus a) das Supremum von M_n und das Infimum von M_n.

12. Aufgabe (Verknüpfungen)

a) In den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation seien folgende Verknüpfungen definiert:

   i) $x \circ y := y$

   ii) $x \circ y := x + y + x \cdot y$

   iii) $x \circ y := x - y$

   iv) $x \circ y := x + y + 1$

   Man untersuche für die Operationen ai) – aiv), ob sie kommutativ oder assoziativ sind. Bezüglich welcher Operation existiert ein neutrales Element? Bezüglich welcher Operation ist eine Inversenbildung möglich?

b) Es sei $\circ$ eine assoziative innere Verknüpfung auf der Menge G mit neutralem Element n. Es gelte

$$\forall x \in G : x \circ x = n$$

   Zeigen Sie, dass $\circ$ kommutativ ist.

c) Auf der Potenzmenge $\wp(M)$ einer Menge M sei für $A, B \in \wp(M)$ die *symmetrische Differenz* Δ definiert durch:

$$A \,\Delta\, B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A) .$$

   Zeigen Sie, dass die Verknüpfung Δ die gleichen Eigenschaften wie die Addition in $\mathbb{R}$ hat.

13. Aufgabe (Matrizen)

a) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Berechnen sie $A^3 - 3A^2 + 4 \cdot \mathsf{I}$ und verwenden sie das Ergebnis zur Berechnung von A^{-1}.

b) Für welche Werte von a ist die folgende Matrix invertierbar?

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & a-1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ a & -3 & 3a & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

14. Aufgabe (Abbildungen, Bild-/Urbildmenge, Isoquante)

a) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x, y) := x \cdot y$.

i) Berechnen Sie die Bildmengen $f(\{(2, 3), (4, 5)\})$ und $f([-2, 3[\times[2, 4])$.

ii) Skizzieren Sie die Niveaulinie von f zum Wert 5 und das Urbild $f^{-1}([2, 5[)$.

b) Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. A, B seien Teilmengen von X und C, D Teilmengen von Y. Beweisen Sie folgende Aussagen!

i) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

ii) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

iii) $f(X \setminus A) \supset f(X) \setminus f(A)$

iv) $f^{-1}(f(A)) \supset A$

v) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

vi) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

vii) $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$

viii) $f(f^{-1}(C)) \supset C$

Begründen Sie, warum in bi), biii), biv) und bviii) nicht die Gleichheit gilt!

15. Aufgabe (Funktionen, Injektivität, Surjektivität)

a) Wir definieren die Funktionen $f, g, h : \{0, 1, 5\} \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} f(x) &:= \sqrt{3x+1} \\ g(x) &:= 1 + \frac{11}{10}x - \frac{1}{10}x^2 \\ h(x) &:= \ln\left|(x-1)\cdot \mathrm{e} - x\cdot \mathrm{e}^2 + \frac{x(x-1)}{20}\cdot(\mathrm{e}^4 + 5\,\mathrm{e}^2 - 4\,\mathrm{e})\right| \end{aligned}$$

Äußern Sie sich zur Aussage: «Die Funktionen f, g und h sind gleich!»

b) Untersuchen Sie folgende Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Injektivität und Surjektivität. Berechnen Sie die Umkehrfunktion.

$$f(n) := \begin{cases} 2n-1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ durch 4 teilbar} \\ n+1 & \text{falls } n \text{ gerade und nicht durch 4 teilbar} \end{cases}$$

16. Aufgabe (Funktionen, Invertierbarkeit)

a) Berechnen Sie für folgende Funktionen (sofern existent) die Inverse.

i) $f :]-\infty, 0] \to [0, \infty[$, mit $x \mapsto f(x) := x^2$

ii) $g : \mathbb{R}\backslash\{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{R}$, mit $x \mapsto g(x) := \dfrac{ax+b}{cx+d}$ und a, b, c, d konstant $(c \neq 0)$

iii) $h : [\ 0, \infty[\to \mathbb{R}$, mit $x \mapsto h(x) := \dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1}$

iv) $k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, mit $\boldsymbol{x} \mapsto k(x_1, x_2, x_3) := (x_1 - x_2, (x_2 + x_3)^3, x_3 - x_1)$

v) $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $x \mapsto \ell(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{für } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$

b) Untersuchen Sie, ob die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit $f(x) := x^2$ invertierbar, rechtsinvertierbar oder linksinvertierbar ist.

17. Aufgabe (Homothetische und homogene Funktionen)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *homothetisch*, wenn gilt:

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y}) \implies \forall t > 0 : f(t\boldsymbol{x}) = f(t\boldsymbol{y})$$

a) Erläutern Sie den Begriff der Homothetie ökonomisch anhand einer Nutzenfunktion f.

b) Zeigen Sie:

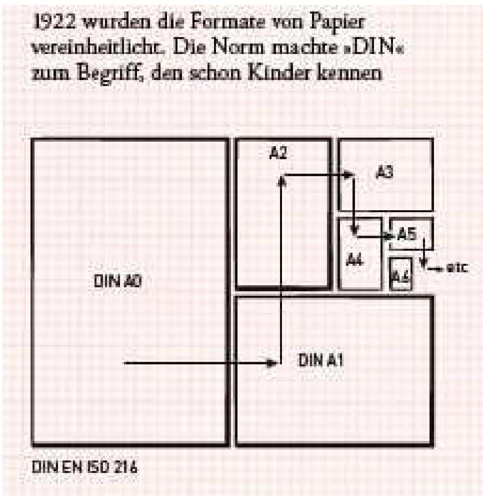
i) Jede homogene Funktion ist homothetisch.

ii) Ist $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine homogene Funktion, so ist $H \circ f$ homothetisch.

c) Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) := x^2yz + 3$ homogen bzw. homothetisch?

18. Aufgabe (Geometrische Folgen und Reihen)

a) Hier eine Graphik aus der ZEIT Nr. 10 vom 1. März 2018 (Wissen, Seite 40).



Finden Sie Beziehungen zwischen den Flächen und Seitenlängen der Papierformate!

b) In einer geometrischen Folge mit positiven Gliedern ist das Produkt des zweiten und vierten Glieds gleich 1296, das fünfte Glied ist 16. Berechnen Sie die Summe der ersten 10 Glieder.

c) Die Summe aus den ersten fünf Gliedern einer geometrischen Folge mit q=0,8 hat den Wert 420,2. Berechnen Sie das Bildungsgesetz der Folge!

d) Die Summe der geraden Glieder einer geometrischen Folge von 5 rationalen Zahlen beträgt $\frac{5}{2}$, die der ungeraden Glieder $\frac{21}{4}$. Wie lauten die einzelnen Glieder?

e) Die Mathematik-Vorlesung einer renommierten deutschen Universität wurde in der dritten bzw. achten Vorlesungswoche von 411 bzw. 353 Studenten besucht.

i) Um wieviel Prozent nimmt der Besuch der Vorlesung wöchentlich ab, wenn man von einer konstanten wöchentlichen Abnahmerate ausgeht?

ii) Nachdem der Fachbereich im nächsten Semester für eifrigen Vorlesungsbesuch einen Preis ausgesetzt hat und keine Mathematik-Scheine von anderen Universitäten mehr anerkennt, sinkt die wöchentliche Abnahmerate des Vorlesungsbesuchs auf 1 Prozent. In welcher Woche kann nun der insgesamt 5000. Vorlesungsbesucher mit der „goldenen Schindel“ ausgezeichnet werden, wenn in der 1. Woche 500 Hörer die Vorlesung besucht haben?

19. Aufgabe (Folgengrenzwerte)

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen, d.h. $x_0=x_1=1$ und $x_{n+2} = x_{n+1}+x_n$ für $n\in\mathbb{N}$. Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch $y_n := \frac{x_{n+1}}{x_n}$ Zeigen Sie, dass gilt:

a) $\forall k\in\mathbb{N} : y_{2k} \leqslant y_{2k+2} \leqslant 2$

b) $\forall k\in\mathbb{N} : y_{2k+1} = 1 + \frac{1}{y_{2k}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

20. Aufgabe (Stetigkeit)

a) Berechnen Sie a, b, so dass die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{für} \quad x \leqslant -2 \\ ax+b & \text{für} \quad -2 < x < 2 \\ \sqrt{x} & \text{für} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$$

stetig ist. Skizzieren Sie den Graphen von f.

b) In welchen Punkten ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 2-x & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

stetig?

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass es zu jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Folge rationaler Zahlen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ und eine Folge irrationaler Zahlen $(\tilde{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ gibt, mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = x_0 \ .$$

c) Die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$h(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{falls} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

i) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{y \to 0} \left(\lim\limits_{x \to 0} h(x,y) \right)$ und $\lim\limits_{x \to 0} \left(\lim\limits_{y \to 0} h(x,y) \right)$.

ii) Untersuchen Sie h auf Stetigkeit.

21. Aufgabe (Rentenrechnung, unterjährige Zahlungen)

a) Sie möchten Ihre Altersversorgung durch konstante monatliche Zahlungen sichern. Sie beginnen am 1.7.2006 und leisten die letzte Zahlung am 1.2.2035. Am 1.1.2037 soll Ihnen ein Betrag von 500.000 € zur Verfügung stehen. Welche Summe müssen Sie monatlich einzahlen, wenn über den gesamten Betrachtungszeitraum ein Zinssatz von 8% p.a. bei jährlichem Zinszuschlag am 31.12. gewährt wird?

b) Gesetzt den Fall, Sie heben ab dem 1.1.2037 zu Beginn eines jeden Jahres 48.000 € vom angesparten Kapital ab. Wann können Sie zum letzten Mal den vollen Betrag abheben? Wie groß ist die danach verbleibende Summe auf dem Konto?

c) Falls Sie jährlich einen arithmetisch steigenden Betrag abheben möchten, beginnend am 1.1.2037 mit 30.000 €, wie groß können Sie die jährliche Steigerung höchstens wählen, so dass Sie am 1.1.2062 noch eine volle Abbuchung tätigen können?

d) Letztlich entscheiden Sie sich für eine geometrische Steigerung der Jahresbeträge um 6%. Mit welcher Summe können Sie am 1.1.2037 beginnen, wenn Sie wiederum am 1.1.2062 letztmals den vollen Betrag abheben wollen?

22. Aufgabe (Rentenrechnung)

a) Einige Versicherungen erlauben bereits zum Abschluss des Vertrages eine begonnene oder ärztlich empfohlene Behandlung. Da sich viele Studenten an mathematischen Fragestellungen die Zähne ausbeißen, sich irreparable Nervenschäden zufügen oder aber durch cholerische Episoden auffällig werden, sind solche Versicherungsangebote ein Segen in der Klausurvorbereitungszeit.

Wägen Sie ab, ob folgendes Angebot lukrativ ist. Gehen Sie dabei davon aus, dass Sie sich beim Schreiben der Klausur Zahnschäden i.H.v. 754 € zufügen, die zum 01.04.2018 fällig werden und rechnen Sie mit einem Kalkulationszinssatz von 3% p.a. bei jährlichem Zinszuschlag zum 01.01.

Angebot: Versicherungskosten 34 € monatlich bei einer Vertragslaufzeit von 24 Monaten. Erste Zahlung zum 01.03.2018 fällig.

b) Der Student M.E. Tapfer realisiert, dass er allein mit sicherem Auftreten[3] keine Chance hat, die bevorstehende Klausur des anspruchsvollen Dr. Lukas Schlendrian zu bestehen. Aufgrund dieser ernüchternden Erkenntnis greift er auf sein praxisrelevantes BWL-Wissen

[3] Sein Spitzname unter Kommilitonen ist folgerichtig »Der tapfere Schneider«!

zurück und schlussfolgert, dass sein Dozent, bekannt für seinen ausschweifenden und monetär intensiven Lebensstil, sicherlich für einen Akt »akademischer Landschaftspflege« offen ist! Nun bleibt für ihn lediglich die Frage zu klären, welchen Preis die ersehnte 4.0 fordern wird. Da Tapfer jedoch über keinerlei nennenswertes finanzmathematisches Wissen verfügt, muss er sich mit seinen Überlegungen an kompetente Kommilitonen wenden. Helfen Sie Tapfer, die Minimalkosten dieser »Drittmittel« finanzmathematisch korrekt zu ermitteln! Rechnen Sie dabei mit einem Kalkulationszinssatz von 5% p.a. bei jährlichem Zinszuschlag und gehen Sie von folgenden Annahmen aus:

- Die »Pflegeleistung« findet zum 01.02.2018 statt und wird unmittelbar aufgedeckt, da plötzlich der verurteilende Blick Dr. Schlendrians den Studenten während der Vorlesung verschont.
- Dr. Schlendrian entgeht in der Folge sein Gehalt, welches Tapfer auf 5.000 € monatlich schätzt. Das geplante Ende seiner Universitätskarriere war der 01.08.2019.
- Schlendrian erleidet in der Folge zudem einen alle 2 Monate anfallenden Prestigeverlust, der sich monetär mit 10.000 € beziffern lässt. Dieser reduziert sich mit jeder Zahlung um 2.000 €.

c) Nach großen Forschungserfolgen und unter Berücksichtigung der Herausforderungen der Zukunft beschließt die Universität des Saarlandes, einen Sonderforschungsbereich Agrarwissenschaften einzurichten. Als erstes großes Projekt nimmt man das Klonen des sogenannten $1\frac{1}{2}$-Eier-Huhns in Angriff, dessen Züchtung seit Jahren weltweites Interesse hervorruft.
Dem Züchter, Dr. Schindluder, wird bei Verkauf seiner Rechte eine 10-jährige Rente von anfangs 10.000 € angeboten, die sich jährlich um 5% steigern soll.
Das Max-Planck-Institut für Geflügel-Wissenschaften bietet Dr. Schindluder für den Verkauf seiner Rechte monatliche Zahlungen von 1000 € (jeweils am Monatsende) an, wobei die monatlichen Zahlungen nach jedem Jahr um 100 € erhöht werden, und das über 8 Jahre hinweg.

Wahlweise könnte Dr. Schindluder das Huhn auch selbst weiterzüchten und vermarkten. In diesem Fall hat er mit einer einmaligen Investition von 6500 € zu rechnen und jährlichen Erlösen in Höhe von 25.000 € über einen Zeitraum von 5 Jahren.

Wie wird sich Dr. Schindluder entscheiden, wenn man einen Zinssatz von 6,4% p.a. zugrundelegt?

23. Aufgabe (Interner Zinssatz, Anleihen, Kursrechnung)

Gegeben sei eine Couponanleihe mit Rückzahlungskurs 100 €, einer Laufzeit von zwei Jahren und jährlichen Couponzahlungen in Höhe von 4 €.

a) Berechnen Sie den Kurs der Anleihe, wenn der Marktzins 2% p.a. (bei jährlichem Zinszuschlag) beträgt.

b) Berechnen Sie die Rendite der Anleihe, wenn der Kurs 102 € beträgt.

c) Berechnen Sie die Rendite der Anleihe bei einem Kurs von 102 €, wenn die Laufzeit vier statt zwei Jahre und der Rückzahlungskurs 99 € statt 100 € beträgt.

24. Aufgabe (Newton-Verfahren, effektiver Zinssatz)
Ein Kredit in Höhe von 100.000 € wird in 10 Jahren durch

a) jährliche Zahlungen von jeweils 12.000 €

b) monatliche Zahlungen von jeweils 1.000 €

vollständig getilgt. Berechnen Sie in beiden Fällen den effektiven Jahreszins. Wie ändern sich die Ergebnisse, wenn die Bank eine einmalige Bearbeitungsgebühr von 1% bzw. 2% der Kreditsumme verlangt?

25. Aufgabe (Effektiver Zinssatz)
Jemand legt ein Kapital der Höhe K vom 1.1. bis zum Jahresende an. Berechnen Sie den effektiven Jahreszins, wenn bei monatlichem Zinszuschlag ein Monatszinssatz i_M vereinbart ist. Ändert sich das Ergebnis, wenn der Einzahlungszeitpunkt der 1.2., 1.3. usw. ist? Ermitteln Sie eine Formel für den effektiven Jahreszins in Abhängigkeit von der Zahl der Anlagemonate und vergleichen Sie diese mit der in der Literatur häufig zu findenden Effektivzinsformel

$$\mathrm{i}_{\mathrm{eff}} = (1+i_M)^{12} - 1$$

Hinweis: Man verwende Aufgabe 7 c)!

26. Aufgabe (Elementare Differentialrechnung)
Berechnen Sie die Menge aller Tupel $(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, für die gilt:

$$\forall x > 0 : a^x > b \cdot x$$

27. Aufgabe (Differentialrechnung)
Berechnen Sie für folgende Funktionsvorschriften $x \mapsto f(x)$ jeweils den maximalen Definitionsbereich und die Ableitung.

a) $f(x) := \ln\big(\ln(x)\big)$

b) $f(x) := x^x$

c) $f(x) := x^{\ln(x)}$

d) $f(x) := \ln(x)^x$

e) $f(x) := \ln(x)^{\ln(x)}$

f) $\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ **Bemerkung:** Φ heißt Standardnormalverteilung!

28. Aufgabe (Homogenität, Elastizität)

a) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ homogen vom Grad r, d.h. es gilt $f(\lambda \cdot \boldsymbol{x}) = \lambda^r \cdot f(\boldsymbol{x})$ für alle $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass dann $f' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m \times n}$ homogen vom Grad $r-1$ ist.

b) Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei homogen vom Grad r, d.h. es gilt für alle $\lambda > 0$:

$$(*)\quad f(\lambda{\cdot}x_1, \lambda{\cdot}x_2, \ldots, \lambda{\cdot}x_n) \;=\; \lambda^r{\cdot}f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ .$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

i) $\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell{\cdot}D_\ell f(x_1, \ldots, x_n) \;=\; r{\cdot}f(x_1, \ldots, x_n)$ (Eulersche Homogenitätsrelation)

Hinweis: Man differenziere Gleichung $(*)$ nach λ und setze anschließend $\lambda{=}1$

ii) Die Summe aller partiellen Elastizitäten ist gleich r.

iii) Berechnen Sie $x\dfrac{\partial g}{\partial x} + y\dfrac{\partial g}{\partial y} + z\dfrac{\partial g}{\partial z}$ für die Funktion $g(x, y, z) := \left(\dfrac{x - y + z}{x + y - z}\right)^\alpha$.

29. Aufgabe (Taylorpolynome, Ableitung der Umkehrfunktion)

a) Gegeben seien die trigonometrischen Funktionen sin, cos, tan und cot.

i) Skizzieren Sie diese Funktionen.

ii) Schränken Sie jede Funktion auf einen möglichst großen Definitionsbereich ein, so dass die Einschränkung bijektiv ist (Beweis!).

iii) Berechnen Sie die Ableitung der zugehörigen Umkehrfunktionen arcsin, arccos, arctan und arccot. **Hinweis**: Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion!

b) Berechnen Sie für folgende Funktionen eine Taylorreihe!

i) $f(x){=}\ln(1{+}x)$ ii) $f(x){=}\ln(1{-}x)$ iii) $f(x){=}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ iv) $f(x){=}\arctan(x)$

30. Aufgabe (Partial Derivatives)

a) Let x and y be the populations of two cities and d the distance between them. Suppose that the number of travellers T between the cities is given by

$$T = k \cdot \frac{xy}{d^n} \quad (k \text{ and } n \text{ are positive constants})$$

Find $\dfrac{\partial T}{\partial x}$, $\dfrac{\partial T}{\partial y}$, and $\dfrac{\partial T}{\partial d}$, and discuss their signs.

b) The demand for money M in the US for the period 1929-1952 has been estimated as

$$M = 0.14Y + 76.03(r - 2)^{-0.84} \quad (r > 2)$$

where Y is the annual national income, and r is the interest rate.

Find $\dfrac{\partial M}{\partial Y}$ and $\dfrac{\partial M}{\partial r}$ and discuss their signs.

c) The demand D for a product depends on the price p of the product and on the price q charged by a competing producer. In fact, $D(p, q) = a - bpq^{-\alpha}$, where a, b, and α are positive constants with $\alpha < 1$.

Comment the signs of the partial derivatives $\dfrac{\partial D}{\partial p}$ and $\dfrac{\partial D}{\partial q}$.

d) Let $D(p, q)$ and $E(p, q)$ be the demands for two commodities when the prices per unit are p and q, respectively. Suppose the commodities are *substitutes* in consumption. What are the normal signs of the partial derivatives of D and E w.r.t. p and q.

e) Consider an agricultural production function $Y = F(K, L, T)$, where Y is the number of units produced, K is capital invested, L is labour input, and T is the area of agricultural land that is used. Then $\frac{\partial Y}{\partial K}, \frac{\partial Y}{\partial L}, \frac{\partial Y}{\partial T}$ are called the *marginal product* of capital, of labour and of land, respectively.

Suppose, in particular, that F is the Cobb-Douglas function

$$F(K, L, T) = A{\cdot}K^a L^b T^c \quad (0 < a, b, c < 1,\ A \text{ are constants})$$

Find the marginal products, and the second-order partials. Discuss their signs.

31. Aufgabe (Implizite Funktionen, Niveaulinien)

Die Gleichung $x_1^2 y^2 + y\,\mathrm{e}^{-x_2} = x_1 x_2 + 2$ definiert y implizit als Funktion der Variablen x_1, x_2. Berechnen Sie $y'(1,0)$!

32. Aufgabe (Optimierung in einer Veränderlichen)

a) Die Preisabsatzfunktion p und die Kostenfunktion K eines Unternehmens seien bei einer Ausbringungsmenge $x \geqslant 0$

$$p(x) = \max\Big\{0\ ,\ \min\{100{-}x, 50{-}\tfrac{1}{4}x\}\Big\} \quad \text{und} \quad K(x) = \tfrac{1}{4}x^2\ .$$

i) Bestimmen Sie die Erlös- und die Gewinnfunktion.

ii) Bestimmen Sie die gewinnmaximale Ausbringungsmenge.

b) Autoren von wissenschaftlichen Lehrbüchern erhalten in der Regel einen festen Prozentsatz vom Verkaufserlös ihres Buches als Honorar vom Verlag.
Zeigen Sie, dass bei affin-linearer Preisabsatzfunktion für das betreffende Werk und Gewinnmaximierung des Verlags, dieser stets eine geringere Auflage zu höherem Preis verkaufen möchte als der Autor, falls dieser Honorarmaximierung anstrebt. Gehen Sie dabei davon aus, dass die für den Verlag neben dem Honorar anfallenden Kosten ebenfalls affin-linear sind.

33. Aufgabe (Optimierung)

a) Rollt man einen Kreissektor zusammen, entsteht ein Kreiskegel. Für welchen Winkel des Kreissektors entsteht ein Kegel mit maximalem Volumen? In welchem Verhältnis steht die zugehörige Mantelfläche zur Kreisfläche?

b) Aus einem Dreieck soll parallel zur Grundlinie ein Rechteck ausgeschnitten und zu einem Zylinder mit größtem Inhalt gerollt werden. In welchem Verhältnis stehen Dreiecksfläche und Zylindermantel?[4]

c) Es sollen zylindrische Literdosen hergestellt werden. Wie sind die Ausmaße zu wählen, wenn dabei möglichst wenig Blech verbraucht werden soll? (Falzränder und Lötstreifen werden nicht berücksichtigt.) Wie ändert sich das Ergebnis, wenn die kreisförmigen Deckel

i) aus dem umschriebenen Quadrat

ii) aus dem umschriebenen regelmäßigen Sechseck

[4] Abitur 1927

ausgestanzt werden und der Abfall beim Ausstanzen der Grundflächen zum verbrauchten Material zählt?[5]

34. Aufgabe (Optimierung in mehreren Veränderlichen)

a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $f(x,y) = -2x^2 - 2xy - 2y^2 + 36x + 42y - 158$. Untersuchen Sie, ob f ein Maximum besitzt und bestimmen Sie dieses ggf.

b) Bestimmen Sie - sofern existent - die lokalen und globalen Extrema der folgenden Funktion.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ ;\ (x,y) \mapsto x^4 - ax^2 + y^4 - by^2 \qquad a, b \in \mathbb{R}_+$$

c) In welchem Bereich ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 - x_1^2 - x_2^2 - 2x_1$ konkav? Bestimmen Sie die lokalen Extremwerte von f, und untersuchen Sie, ob diese globale Extremwerte sind.

d) A firm produces two different kinds A and B of a commodity. The daily cost of producing x units of A and y units of B is

$$C(x,y) = 2x^2 - 4xy + 4y^2 - 40x - 20y + 14$$

Suppose that the firm sells all its output at a price per unit of 24$ for A and 12$ for B.

i) Find the daily production levels x and y that maximize profit.

ii) The firm is required to produce exactly 54 units per day of the two kinds combined. What is now the optimal production plan?

35. Aufgabe (Optimierung, Kleinstquadratschätzung)

Der vertikale Abstand des Punktes $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ vom Graphen einer Funktion $g(x)$ beträgt $v - g(u)$.

a) Erläutern Sie den Begriff des vertikalen Abstandes anhand einer Skizze und bestimmen Sie die vertikalen Abstände der Punkte (1,2), (1,3) und (1,5) von der Geraden $g(x) := 2x + 3$.

b) Bestimmen für N vorgegebene Punkte $(x_1, y_1), \ldots, (x_T, y_T)$, $T \in \mathbb{N}$ die Gerade g, für die die Summe der Quadrate der vertikalen Abstände aller T Punkte von g minimal ist (*Regressionsgerade, Bestgerade*).

36. Aufgabe (Optimierung, Lagrangesche Multiplikatorenregel)

Gegeben seien die Mengen

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_1 &= \mathbb{R}^2 \\
\mathbb{D}_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y - x| \leqslant 2\} \\
\mathbb{D}_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leqslant 2\}
\end{aligned}$$

a) Zeichnen Sie die Mengen $\mathbb{D}_2$ und $\mathbb{D}_3$ und untersuchen Sie, ob die Mengen abgeschlossen, beschränkt oder kompakt sind.

[5] Abitur 1952

b) Die Funktion f sei definiert durch

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 - 7y + 10 \; .$$

Bestimmen Sie jeweils alle globalen Extrema von f auf den Mengen $\mathbb{D}_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

c) Hühnerbaron Egon E. will in der Pfalz eine Eierfabrik errichten (Saarbrücker Zeitung: „1,2 Millionen Hühner für die Pfalz“), da das Saarland für die geplanten Dimensionen zu klein ist. Die Stabsstelle „Planung, Strategie und Huhnforschung“ seines Hühnerimperiums hat die Ermittlung der Eier-Produktionsfunktion der geplanten Eierfabrik beim renommierten Max-Planck-Institut für Geflügel-Wissenschaften an der Universität des Saarlandes in Auftrag gegeben. Dieses Institut kann größere Forschungserfolge vorweisen, z.B. das legendäre $1\frac{1}{2}$-Eier-Huhn[6], zumal es gerade einen Sonderforschungsbereich unter der Schirmherrschaft des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Schließungskompetenz auf diesem Sachgebiet ins Leben gerufen hat.
Der weit über die Landesgrenzen hinaus bekannte Hühnerexperte und Institutsleiter Dr. K. Schindluder (siehe z.B. das Satiremagazin Titanic) präsentiert nach dreimonatiger Arbeit für den Eieroutput folgende Produktionsfunktion E:

$$E(x_1, x_2, x_3) = x_1^{0,5} x_2^{0,3} x_3^{0,4}$$

x_1 bezeichnet die Größe der Legebatterie eines Huhnes in Flächeneinheiten (FE), x_2 die Anzahl der Mengeneinheiten (ME) Körner und x_3 die Menge an Wasser, gemessen in Volumeneinheiten (VE). Eine FE kostet 4 Währungseinheiten (WE), eine ME Körner kostet 1 WE und eine VE Wasser 2 WE. Insgesamt stehen stehen 480 WE zur Verfügung.

i) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:
   - „Je mehr Platz ein Huhn in der Legebatterie hat, desto unproduktiver ist es, da es mehr Energie beim Herumlaufen verschwendet und daher weniger Eier legt.“
   - „Vergrößert man die Legebatterie eines Huhnes, so nimmt der Eieroutput überproportional zu.“

ii) Ermitteln Sie für einen maximalen Eieroutput die optimalen Einsatzmengen an Körnern und Wasser, sowie die optimale Größe der Legebatterie.

37. Aufgabe (Integral, Stammfunktion)

a) Bringen Sie die Aussage

„Ist der Integrand eine positive Funktion, so ist das Integral ebenfalls positiv.“

und die Rechnung

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2$$

in Einklang.

[6] Dieses besitzt gentechnisch bedingt drei Beine, was für den durchschnittlichen deutschen 3-Personenhaushalt ebenfalls von großem Vorteil ist!

b) Helle Aufregung in Mathematikerkreisen! Es drohen Chaos und Anarchie seit kürzlich die Professoren Klaus Hahne und Christian Büchen folgenden Beweis einer oft befürchteten, aber bis dahin für unmöglich gehaltenen Tatsache vorlegten:

$$\int \frac{dx}{x} = \int 1 \cdot \frac{1}{x} dx \; = \; x \cdot \frac{1}{x} - \int x \cdot (-\frac{1}{x^2}) dx \implies \int \frac{dx}{x} \; = \; 1 + \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad 0 = 1$$

Wer weiß Rat und rettet die Mathematik?

c) Sei $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit den Eigenschaften:

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \; f'(1) = 3, \; f(1) = 5$$

Welchen Wert hat $f(\mathrm{e})$? (Begründung!)

38. Aufgabe (Abitur 1974)

a) Gegeben sei die Funktion

$$(2) \quad f(x) = \Big[\ln \big(\frac{x}{c} \big) \Big]^2 + \ln(c),$$

wobei c eine positive Zahl ist.

i) Bestimmen Sie den Definitionsbereich dieser Funktion und weisen Sie nach, dass der Graph von f genau einen Tiefpunkt und genau einen Wendepunkt besitzt. Welche Koordinaten haben diese Punkte?

ii) Wie verhält sich f, wenn x gegen die Grenzen des Definitionsbereiches strebt? Besitzt f Nullstellen? (Fallunterscheidung!) Diese Nullstellen sind gegebenenfalls zu berechnen.

iii) Skizzieren Sie unter Benutzung der bisherigen Ergebnisse die Graphen von f für $c_1 = 1$ und $c_2 = \mathrm{e}^{-1}$.

b) In Verallgemeinerung von (2) wird jetzt der Ansatz

$$(3) \quad f(x) = \Big[\ln \big(\frac{x}{c} \big) \Big]^2 + k(c)$$

betrachtet, in welchem $k(c)$ eine Funktion des positiven Parameters c sei. Jede Kurve der durch (3) gegebenen Kurvenschar, besitzt ebenfalls genau einen Tiefpunkt T und genau einen Wendepunkt W.

i) Geben Sie die Koordinaten dieser Punkte an.

ii) Bei veränderlichem c bewegen sich die Punkte T und W auf Ortslinien, deren Gleichungen in Parameterform durch die Ergebnisse von Teilaufgabe bi) dargestellt werden. Beweisen Sie, dass im Fall $k(c) = \ln(c)$ die beiden Ortslinien übereinstimmen.

iii) Ermitteln Sie die Bedingungsgleichung, die sich für die Funktion k ergibt, wenn man fordert, dass die Ortslinien der Tief- und Wendepunkte der Schar (3) übereinstimmen.

39. Aufgabe (Abitur 1975)

a) Gegeben seien die beiden Funktionen

$$f(x) = \arctan \big(\tfrac{1}{x} \big) \quad \text{und} \quad g(x) = \operatorname{arccot}(x)$$

i) Geben Sie den Definitionsbereich von f an. Wie verhält sich f, wenn x gegen die Lücke des Definitionsbereiches strebt?

ii) Vergleichen Sie die Ableitungen f' und g' miteinander und zeigen Sie

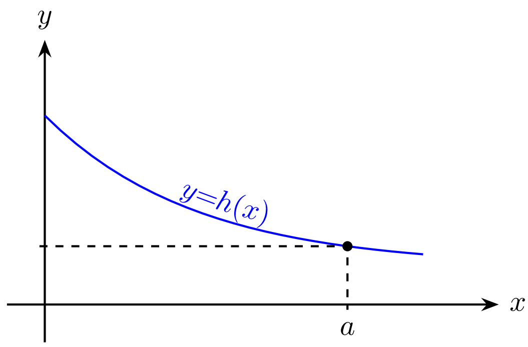
$$g(x) - f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x>0 \\ \pi & \text{für} \quad x<0 \end{cases}$$

iii) Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse die Graphen von f und g.

b) Es seien $y = h(x)$ eine im Intervall $0 \leqslant x \leqslant a$ stetige und streng monoton fallende Funktion und $x = k(y)$ ihre Umkehrfunktion (mit y als unabhängiger Veränderlicher). Dann gilt die Gleichung

$$(4) \qquad \int\limits_0^a h(x)dx \;=\; a \cdot h(a) \;+ \int\limits_{h(a)}^{h(0)} k(y)dy$$

i) Deuten Sie Gleichung (4) unter der Annahme $h(a) > 0$ an Hand[7] folgender Skizze.



ii) Wir definieren die Funktion $\varphi : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für} \quad x>0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für} \quad x=0 \end{cases}$$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen φ und g?

iii) Zeigen Sie, dass φ auch streng monoton fallend ist. Damit erfüllt φ für jedes $a > 0$ die Voraussetzungen, die in Teilaufgabe b) gemacht wurden.

Berechnen Sie $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \varphi(x)dx$

α) mittels Gleichung (4) $\qquad$ β) mit der Methode der partiellen Integration.

40. Aufgabe (Hauptsatz Differential- und Integralrechnung, Normalverteilung)

Der Wert C einer *europäischen*[8] *Kaufoption* mit *Ausübungskurs* E und *Laufzeit* T auf eine Aktie mit dem Kurs S und der *Volatilität* (Schwankungsverhalten) σ berechnet sich bei einem stetigen

[7] Nach neuer deutscher Rechtschreibung: „anhand“!

[8] Europäische Optionen können erst am Ende der Laufzeit ausgeübt werden.

Periodenzinssatz i nach der Formel von *Black/Scholes* durch[9]

$$C = S\cdot\Phi(y+\sigma\sqrt{T}) - \mathrm{e}^{-iT}\cdot E\cdot\Phi(y) \ .$$

Hierbei bezeichnet Φ die Standardnormalverteilung (siehe Aufgabe 27) und

$$y := \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (i-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Berechnen Sie die *Hedgerate* $\dfrac{\partial C}{\partial S}$ des Optionspreises.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $S\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(y+\sigma\sqrt{T})^2} - \mathrm{e}^{-iT}\cdot E\cdot\mathrm{e}^{-(\frac{y^2}{2})} = 0$ gilt!

[9] Der Einfachheit wegen ist hierbei vorausgesetzt, dass während der Laufzeit T keine Dividenden anfallen.