Hausaufgaben
Mathematik C

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden △GLen.

a) $3Y_{t+1} + 4Y_t + Y_{t-1} = 0$, mit i) $Y_1 = Y_2 = 1$ ii) $Y_1 = 1,\ Y_2 = 2$

b) $Y_{t+2} - 5Y_{t+1} + 6Y_t = t$, mit i) $Y_1 = Y_2 = 1$ ii) $Y_1 = 1,\ Y_2 = 2$

c) $Y_{t+1} - 3Y_t = 5^t$, mit $Y_2 = 1$

d) $Y_{t+2} - 2Y_{t+1} + 2Y_t = 6 \cdot \sin(\frac{\pi}{2} \cdot t)$, mit $Y_0 = \frac{2}{5},\ Y_1 = \frac{3}{5}$

e) $Y_{t+2} - 2 \cdot kY_{t+1} + k^2 Y_t = 3 \cdot k^t$, mit $Y_1 = 1, Y_2 = 2$ $(k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ konstant)

Hinweis: Substitution $Y_t := 3k^{t-2} v_t$.

Aufgabe 2

a) Beweisen Sie folgende Aussage:
Ist h eine nicht negative Funktion mit $h'(t) \leqslant K \cdot h(t)$ (K konstant), die in t_0 eine Nullstelle besitzt, so gilt $h(t) = 0$ für alle $t \geqslant t_0$.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Funktion $\mathrm{e}^{-K(t-t_0)} \cdot h(t)$ monoton fallend ist.

b) Wandeln Sie die AWA $\dot{y} = t + t \cdot y$, $y(0) = 0$ in eine Integralgleichung um und lösen Sie diese mittels sukzessiver Approximation.

c) Lösen Sie mittels sukzessiver Approximation die folgende AWA:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_1 \\ \dot{y}_2 &= y_1 + y_2 \\ y_1(0) = 1 \quad &, \quad y_2(0) = 0 \end{aligned}$$

d) Lösen Sie die folgenden DGLen mit dem jeweils angegebenen Verfahren.

i) $\ln(y^2+1) + \dfrac{2y(t-1)}{y^2+1} \cdot \dot{y} = 0$ (exakt)

ii) $y\,\mathrm{e}^t + (1+y)\,\mathrm{e}^t \cdot \dot{y} = 0$ (integrierender Faktor)

iii) $ty + \dot{y} = 0$ (separabler integrierender Faktor)

iv) $\dot{y} + \dfrac{t^2\,\mathrm{e}^t}{y^2} = 0$ (separabel)

v) $\dot{y} = \dfrac{y^2-t^2}{2ty}$ (homogene Funktionen)

vi) $\dot{y} - 2t \cdot y = \mathrm{e}^{(t^2)}$ (linear)

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der DGL

$$(2t-t^2) \cdot \ddot{y} + (t^2-2) \cdot \dot{y} + 2(1-t) \cdot y = 0.$$

Hinweis: Eine Lösung hat die Gestalt $y(t) = t^n$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie, dass die Bernoulli-DGL

$$\dot{y} + g(t)y + h(t)y^n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}, n \neq 1)$$

durch die Transformation $z = y^{1-n}$ in eine lineare DGL überführt wird.

c) Lösen Sie die DGL

$$t^2(t-1)\dot{y} - t(t-2)y - y^2 = 0.$$

d) Sei $U{=}U(x)$ $(x{\in}\mathbb{R})$ eine Nutzenfunktion. Das Arrow-Pratt-Maß der absoluten bzw. relativen Risikoaversion auf dem Wohlstandsniveau x ist definiert durch

$$\mu(x) := -\frac{U"(x)}{U'(x)} \text{ bzw. } \nu(x) := -x\frac{U"(x)}{U'(x)}.$$

Bestimmen Sie alle Nutzenfunktionen, deren

i) absolutes Risikoaversionsmaß konstant ist,

ii) relatives Risikoaversionsmaß konstant ist.

e) Bestimmen Sie alle Produktionsfunktionen $P = P(A, K)$ in zwei Veränderlichen A und K, deren partielle Produktionselastizitäten konstant α bzw. β sind.

f) Skizzieren Sie die Richtungsfelder der folgenden DGLen:

i) $\dot{y} = t^2 + y^2$ ii) $\dot{y} = \frac{y}{t} + 1$ iii) $\dot{y} = \frac{\cos^2(y)}{\sin(y)\cos^2(t)}$

Aufgabe 4

a) Betrachten Sie das folgende DGL-System:

$$(*) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -y + x \cdot \left(1 - x^2 - y^2\right) \\ \dot{y} &= x + y \cdot \left(1 - x^2 - y^2\right) \end{aligned}$$

i) Skizzieren Sie die Isoklinen $\dot{x} = 0$ und $\dot{y} = 0$ von $(*)$.

Hinweis: Die Isoklinen sind keine Funktionen sondern Relationen.

ii) Skizzieren Sie das Phasendiagramm von $(*)$.

b) Berechnen Sie die Extremale der folgenden Zielfunktionen V.

i) $V(y) = \int_0^1 (y^2 + 4y\dot{y} + 2\dot{y}^2)dt$, mit $y(0) = 2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $y(1) = 1 + \mathrm{e}^{\sqrt{2}}$

ii) $V(\boldsymbol{y}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2y_1y_2 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)dt$, mit $\boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Achtung: $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

c) Lösen Sie folgende Probleme mit Hilfe des Maximum Prinzips.

i) $V(u) = \int_0^2 (2y - 3u - \alpha \cdot u^2)dt \to \max$

u.d.N. $\dot{y} = y + u$

$y(0) = 5$

$0 \leqslant u \leqslant 2$

Hierbei sei $\alpha = 0$ bzw. $\alpha = 1$.

ii) $V(u) = \int_0^1 (y_1^2 - u^2)dt \to \max$

u.d.N. $\dot{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{y} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u$

$\boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$u \in \mathbb{R}$

iii) $V(u) = F(y(18), 18) = 8y_1(18) + 4y_2(18) \to \max$

u.d.N. $\dot{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot u$

$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$u \in [0, 1]$

Hinweis: Es liegt ein Problem von Mayer vor!