ARBEITSUNTERLAGEN

ZUR VORLESUNG UND ÜBUNG
AN DER
UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

MAẞ-, INTEGRATIONS- & WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

im
SS 2018

1. Aufgabe (σ-Algebra)

a) Geben Sie die kleinste und die größte σ-Algebra in einer Menge Ω an!

b) Zeigen Sie, dass jede endliche σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in einer Menge $\Omega \neq \emptyset$ eine gerade Zahl von Elementen besitzt.

2. Aufgabe (Ringe, Algebren, σ-Algebren in endlichen Mengen)

a) Bestimmen Sie alle σ-Algebren in der vierelementigen Menge $\Omega_4 := \{a, b, c, d\}$!

b) Welche der σ-Algebren aus Teil a) wird von $\mathfrak{E} := \big\{\{a\}, \{b\}\big\} \subset \wp(\Omega_4)$ erzeugt?

c) Bestimmen Sie einen nichttrivialen Ring in Ω_4, welcher keine Algebra ist!

d) Bestimmen Sie in der Menge $\Omega_{26} := \{a, b, \ldots, z\}$ zwei verschiedene σ-Algebren, die jeweils $\{a\}$ als einzige einelementige Menge enthalten!

e) Zeigen Sie, dass in einer endlichen Menge Ω jede Algebra eine σ-Algebra ist.

3. Aufgabe (σ-Algebren und Erzeuger)

Zeigen Sie für das Mengensystem $\mathfrak{A} := \{A \subset \Omega \mid A \text{ abzählbar} \vee \complement A \text{ abzählbar}\}$:

a) $\mathfrak{A}$ ist eine σ-Algebra. **Hinweis**: Regel von De Morgan!

b) $\mathfrak{A} = \sigma(\{A \subset \Omega \mid A \text{ endlich}\})$.

4. Aufgabe (Bild, Urbild)

Sei $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Abbildung und seien A, B bzw. C, D Teilmengen von Ω_1 bzw. Ω_2. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gelten:

a) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

b) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

c) $f^{-1}(\complement D) = \complement f^{-1}(D)$

d) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

e) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass in e) die Gleichheit im allgemeinen **nicht** gilt.

5. Aufgabe (σ-Algebra und Urbild)

Zeigen Sie:

a) Ist $T : \Omega' \to \Omega$ eine Abbildung und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω, so ist das Mengensystem

$$T^{-1}(\mathfrak{A}) := \{T^{-1}(A) \mid A \in \mathfrak{A}\}$$

eine σ-Algebra in Ω'.

b) Ist $S : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω, so ist das Mengensystem

$$\mathfrak{A}' := \{A' \in \Omega' \mid S^{-1}(A') \in \mathfrak{A}\}$$

die größte σ-Algebra in Ω', für die $T^{-1}(\mathfrak{A}') \subset \mathfrak{A}$ gilt.

6. Aufgabe (Ringe)

a) Die *symmetrische Differenz* zweier Teilmengen A und B von Ω ist definiert durch

$$A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

Man beweise folgende Rechenregeln für je drei Mengen A,B und C aus Ω:

i) $A \triangle B = B \triangle A$

ii) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

iii) $A \triangle A = \emptyset$, $A \triangle \emptyset = A$

iv) $\complement A \triangle \complement B = A \triangle B$

v) $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$

vi) $\big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\big) \triangle \big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\big) \ \subset \ \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_n \triangle B_n)$ für alle Mengenfolgen (A_n), (B_n) in $\wp(\Omega)$

b) Beweisen Sie Bemerkung 1.10 ii) der Vorlesung mit Hilfe von a)! Beachten Sie dabei **Definition:** Ein algebraischer Ring ist eine Menge $\mathfrak{R}$ mit zwei inneren Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ (Addition und Multiplikation), so dass folgende Eigenschaften gelten:

i) $\mathfrak{R}$ ist eine kommutative Gruppe bzgl. $\oplus$, d.h. für alle $a, b, c \in \mathfrak{R}$ gilt:

1) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ (Assoziativität),

2) $(\exists e \in \mathfrak{R})(\forall a \in \mathfrak{R}) : a \oplus e = a = e \oplus a$ (e heißt neutrales Element),

3) $(\forall a \in \mathfrak{R})(\exists b \in \mathfrak{R}) : a \oplus b = e = b \oplus a$ (inverses Element),

4) $a \oplus b = b \oplus a$ (Kommutativität).

ii) Die Multiplikation $\odot$ auf $\mathfrak{R}$ ist assoziativ, d.h. für alle $a, b \in \mathfrak{R}$ gilt:

$$(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c).$$

iii) Es gelten die Distributivgesetze, d.h. für alle $a, b, c \in \mathfrak{R}$ gilt:

$$(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c) \quad \text{und} \quad a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c).$$

$\mathfrak{R}$ heißt kommutativ, falls die Multiplikation kommutativ ist.

7. Aufgabe (Halbringe)

Sei $\emptyset \neq \mathfrak{E} \subset \wp(\Omega)$ ein durchschnitts- und vereinigungsstabiles Mengensystem. Zeigen Sie:

$$\mathfrak{H} := \{A \backslash B \mid A, B \in \mathfrak{E}\}$$

ist ein Halbring über Ω.

8. Aufgabe (Halbringe)

Sei $f : X \to \Omega$ eine Abbildung und $\mathfrak{H} \subset \wp(\Omega)$ ein Halbring. Untersuchen Sie, ob $f^{-1}(\mathfrak{H})$ ein Halbring über X ist?

9. Aufgabe (Dynkin-Systeme)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und Ω eine endliche Menge mit $|\Omega| = 2n$. Zeigen Sie:

a) Das System $\mathfrak{D} := \{D \subset \Omega \mid |D| \text{ ist gerade }\}$ ist ein Dynkin-System.

b) Für $n > 1$ ist $\mathfrak{D}$ keine Algebra.

10. Aufgabe (Dynkin-Systeme)

a) Zeigen Sie, dass ein Dynkin-System genau dann durchschnittsstabil ist, wenn es vereinigungsstabil ist.

b) Man bestimme das von $\mathfrak{E} = \{A, B\}$ erzeugte Dynkin-System $\boldsymbol{\delta}(\mathfrak{E})$ und zeige, dass $\boldsymbol{\delta}(\mathfrak{E})$ und die von $\mathfrak{E}$ erzeugte σ-Algebra $\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{E})$ genau dann übereinstimmen, wenn eine der Mengen $A \cap B$, $A \cap \complement B$, $\complement A \cap B$, $\complement A \cap \complement B$ leer ist.

11. Aufgabe (Zählmaß)

a) Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω. Die Abbildung $\zeta : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^\star$ ordne jeder endlichen Menge aus $\mathfrak{A}$ ihre Elementanzahl zu und jeder anderen Menge aus $\mathfrak{A}$ den Wert ∞. Zeigen Sie, dass ζ alle Maßeigenschaften erfüllt und damit zu Recht den Namen „Zählmaß“ trägt (vgl. Beispiel 2.3 i) der Vorlesung).

b) Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine endliche Menge und $\mathfrak{A} = \wp(\Omega)$. Zeigen Sie:

i) $\zeta = \sum\limits_{\omega \in \Omega} \epsilon_\omega$

ii) Für jedes Maß μ auf $\mathfrak{A}$ gilt: $\mu = \sum\limits_{\omega \in \Omega} \alpha_\omega \epsilon_\omega$ mit $\alpha_\omega := \mu(\{\omega\})$.

12. Aufgabe (Endlicher Inhalt)

a) Beweisen Sie für die endlichen Mengen $A_1, \ldots, A_n$ die Formel

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{j \in I} A_j\right|.$$

b) Verallgemeinern Sie für einen **endlichen** Inhalt μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ die aus der Vorlesung bekannte Formel

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

auf endlich viele Mengen (vgl. Folgerung 2.8 1) der Vorlesung).

Hinweis: Formulieren Sie Teil a) mit Hilfe des Zählmaßes ζ aus Aufgabe 11.

13. Aufgabe (Prämaß)

a) Sei $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Inhalten auf einem Ring $\mathfrak{R}$ und $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass $\mu := \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \mu_i$ ein Inhalt auf $\mathfrak{R}$ ist.

b) Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine isotone Folge von Prämaßen auf einem Ring $\mathfrak{R}$, d.h. für alle $A\in\mathfrak{R}$ und alle $n\in\mathbb{N}$ gelte $\mu_n(A) \leqslant \mu_{n+1}(A)$. Zeigen Sie, dass dann durch $\mu(A) := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A)$ für alle $A \in \mathfrak{R}$ ein Prämaß μ auf $\mathfrak{R}$ definiert wird.

14. Aufgabe (Limes superior, Limes inferior)

a) Für eine Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert man den **Limes superior** und den **Limes inferior** durch:

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} x_n &:= \lim_{m\to\infty}\Big(\sup_{n\geqslant m} x_n\Big) = \inf_{m\in\mathbb{N}}\Big(\sup_{n\geqslant m} x_n\Big)\\ \liminf_{n\to\infty} x_n &:= \lim_{m\to\infty}\Big(\inf_{n\geqslant m} x_n\Big) = \sup_{m\in\mathbb{N}}\Big(\inf_{n\geqslant m} x_n\Big)\end{aligned}$$

Begründen Sie, warum der Limes inferior und der Limes superior für jede reelle Zahlenfolge existiert und berechnen Sie diese für die nachstehenden Zahlenfolgen:

$$x_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$x_n := \begin{cases} (1+\frac{1}{n})^n & \text{falls } n \text{ gerade} \\ (1+\frac{1}{n})^{n+1} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$x_n := \begin{cases} 1+\frac{1}{2^n} & \text{falls } 3 \mid n \\ 2+\frac{n+1}{n} & \text{falls } 3 \mid (n-1) \\ 2 & \text{falls } 3 \mid (n-2) \end{cases}$$

b) Für eine Folge reellwertiger Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einer Menge Ω definiert man die Funktionen $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ punktweise, also für alle $x \in \Omega$ durch:

$$\Big(\limsup_{n\to\infty} f_n\Big)(x) := \inf_{m\in\mathbb{N}}\Big(\sup_{n\geqslant m} f_n(x)\Big) \quad , \quad \Big(\liminf_{n\to\infty} f_n\Big)(x) := \sup_{m\in\mathbb{N}}\Big(\inf_{n\geqslant m} f_n(x)\Big)$$

Berechnen Sie $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ der gegebenen Funktionsfolgen $f_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

$$f_n(x) := \begin{cases} x & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{x}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$f_n(x) := \begin{cases} 1+\frac{x}{2^n} & \text{falls } 3 \mid n \\ 2+\frac{n+x}{n} & \text{falls } 3 \mid (n-1) \\ 2 & \text{falls } 3 \mid (n-2) \end{cases}$$

$$f_n(x) := \mathbb{1}_{A_n}(x), \text{ wobei } \quad A_n := \Big]\frac{(-1)^n}{n}, 1\Big]$$

c) Bestimmen Sie für die nachstehenden Folgen von Mengen A_n gemäß Definition 2.10 der Vorlesung die Mengen $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$:

$$A_n := \left]\tfrac{(-1)^n}{n}, 1\right]$$

$$A_n := \left[\tfrac{(-1)^n}{n}, n\right]$$

$$A_n := \left]\tfrac{(-1)^n}{n}, 1+\tfrac{(-1)^n}{n}\right]$$

15. Aufgabe (Mengengrenzwerte)

Sei $C\subset\Omega$ und seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\wp(\Omega)$. Weiter bezeichne $\mathbb{1}_M$ die Indikatorfunktion der Menge M. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) $\complement(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n) = \liminf\limits_{n\to\infty} \complement A_n$,

b) $\mathbb{1}_{\liminf\limits_{n\to\infty} A_n} = \liminf\limits_{n\to\infty}\ \mathbb{1}_{A_n}$, $\mathbb{1}_{\limsup\limits_{n\to\infty} A_n} = \limsup\limits_{n\to\infty}\ \mathbb{1}_{A_n}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = C \iff \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_C$,

d) $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \cap \limsup\limits_{n\to\infty} B_n \ \subset\ \limsup\limits_{n\to\infty}(A_n \cap B_n)$,

e) $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n \setminus \liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to\infty}(A_n \triangle A_{n+1})$,

f) Die Folge $(\tilde{A}_k)_{k=1}^{\infty}$ mit $\tilde{A}_k := A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_k$ konvergiert genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \emptyset$ gilt.

16. Aufgabe (Maßraum, Limes superior)

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass für jede Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Mengen aus $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \infty \Longrightarrow \mu\Big(\limsup_{i\to\infty} A_i\Big) = 0.$$

17. Aufgabe (Maßraum, σ-Additivität)

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen aus $\mathfrak{A}$. Es gebe eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ derart, dass die Mengen A_m und A_n für je zwei Indizes $m, n \in \mathbb{N}$ mit $|m-n| \geqslant k$ disjunkt sind. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leqslant k \cdot \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big).$$

Bemerkung 2.9 der Vorlesung liefert für k=1 die σ-Additivität.

18. Aufgabe (Inhalt eindimensionaler Figuren)

Zeigen Sie, dass durch

$$\mu([\alpha,\beta[) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \alpha < 0 \leqslant \beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Inhalt μ auf dem Halbring $\mathfrak{J}^1$ definiert wird ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Untersuchen Sie, ob die Fortsetzung von μ auf den Ring $\mathfrak{F}^1 = \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{J}^1)$ σ-additiv ist.

19. Aufgabe (Topologie)

Beweisen Sie mit dem Satz von Heine-Borel (Anhang D.8) den Satz von **Bolzano-Weierstrass**:

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^k$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Hinweis: Es existiert ein Intervall $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subset \mathbb{R}^k$, das alle Folgenelemente enthält. Würde keine konvergente Teilfolge existieren, gäbe es zu jedem Punkt $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(\boldsymbol{x})$, die höchstens endlich viele Folgenelemente enthält.

20. Aufgabe (Topologie)

Seien A und B Teilmengen eines topologischen Raumes. Beweisen Sie

a) $\complement\overline{A} = \left(\complement A\right)^\circ$ b) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ c) $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$

d) $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$ e) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ f) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

g) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ h) $\complement\overset{\circ}{A} = \overline{\complement A}$ i) A offen $\iff \partial A \cap A = \emptyset$

j) A abg. $\iff \partial A \subset A$ k) A offen $\Rightarrow (\partial A)^\circ = \emptyset$ l) A abg. $\Rightarrow (\partial A)^\circ = \emptyset$

Geben Sie je ein Beispiel, so dass in d) und g) die echte Inklusion gilt. Finden Sie je ein Beispiel für eine weder offene noch abgeschlossene Menge A mit $(\partial A)^\circ = \emptyset$ bzw. $(\partial A)^\circ \neq \emptyset$.

21. Aufgabe (Topologie, Konvergenz)

Gegeben sei die Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ in $\mathbb{R}$ durch $x_n := \dfrac{1}{n}$. Untersuchen Sie die Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ auf Konvergenz und bestimmen Sie im Falle der Konvergenz alle Grenzwerte, wenn die Topologie $\mathfrak{T}$ auf $\mathbb{R}$ gegeben ist durch

i) $\mathfrak{T} := \wp(\mathbb{R})$ (*diskrete Topologie*) ii) $\mathfrak{T} := \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ (*indiskrete Topologie*)

22. Aufgabe (Topologie, Kompaktheit)

Sei $(\Omega, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum.

a) Bestimmen Sie alle kompakten Mengen, wenn

i) $\mathfrak{T} := \wp(\Omega)$ (diskrete Topologie) ii) $\mathfrak{T} := \{\emptyset, \Omega\}$ (indiskrete Topologie)

Beweisen Sie folgende Aussagen!

b) Endliche Vereinigungen kompakter Mengen sind kompakt.

c) Abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen sind kompakt.

d) Endliche Mengen sind kompakt

e) Kompakten Mengen sind i.a. *nicht* abgeschlossen.

23. Aufgabe (Topologie, Kompaktheit)

Seien X und Y zwei topologische Räume und sei $f : X \to Y$ stetig. Zeigen Sie:

Ist $K \subset X$ kompakt, so ist auch $f(K)$ kompakt.

24. Aufgabe (Äußeres Maß)

Sei $\mu^* : \wp(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ gegeben durch:

$$\mu^*(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad A = \emptyset \\ 1 & \text{falls} \quad A \neq \emptyset \text{ und } A \text{ beschränkt} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass μ^* äußeres Maß auf $\wp(\mathbb{R})$ ist.

b) Bestimmen Sie die bzgl. μ^* messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$.

25. Aufgabe (Fortsetzungssatz)

Für eine beliebige Menge Ω seien die Ringe $\mathfrak{R}_1 = \{\emptyset\}$ und $\mathfrak{R}_2 = \{\emptyset, \Omega\}$ gegeben. Auf beiden Ringen betrachte man das Diracsche Prämaß ϵ_ω für ein festes $\omega \in \Omega$. Setzen Sie – dem Beweis des Fortsetzungssatzes 2.17 folgend (*Methode von Caratheodory*) – das Prämaß ϵ_ω jeweils zu einem Maß auf die σ-Algebra $\mathfrak{A}_i := \sigma(\mathfrak{R}_i)$ für $i \in \{1, 2\}$ fort. Geben Sie dabei außerdem jeweils das zur Fortsetzung verwendete äußere Maß $(\epsilon_\omega)_i^*$ sowie das System $\mathfrak{A}_i^*$ aller $(\epsilon_\omega)_i^*$-messbaren Mengen an.

26. Aufgabe (Fortsetzungssatz)

Sei $\mathfrak{R} := \left\{ \bigcup_{i=1}^{n}]a_i, b_i] \;\middle|\; a_i, b_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{R}$ ein Ring, aber keine Algebra in $\mathbb{R}$ ist.

b) Sei $\mu : \mathfrak{R} \to [0; \infty]$ definiert durch:

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad A = \emptyset \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Geben Sie zwei verschiedene Fortsetzungen von μ auf $\sigma(\mathfrak{R}) = \mathfrak{B}$ an.

27. Aufgabe (Endlichkeit, σ-Endlichkeit)

a) Beweisen Sie Bemerkung 2.21 ii) der Vorlesung, d.h. zeigen Sie:

Ein Inhalt μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ ist genau dann σ-endlich, wenn eine isotone Folge $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ in $\mathfrak{R}$ mit $\Omega = \lim_{k \to \infty} A_k$ und $\mu(A_k) < \infty$ existiert.

b) Beweisen Sie Bemerkung 2.20 ii) der Vorlesung, d.h. zeigen Sie:

Das Zählmaß auf der Potenzmenge einer nichtleeren Menge Ω ist genau dann σ-endlich (bzw. endlich), wenn Ω abzählbar (bzw. endlich) ist.

28. Aufgabe (Vollständigkeit des Dirac-Maßes)
Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Messraum und $\omega \in \Omega \neq \emptyset$ mit $\{\omega\} \in \mathfrak{A}$. Zeigen Sie, dass das Dirac-Maß ϵ_ω genau dann vollständig ist, wenn $\mathfrak{A} = \wp(\Omega)$ gilt.

29. Aufgabe (Vervollständigung eines Maßes)
Beweisen Sie Bemerkung 2.26 ii) der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass jedes Maß μ auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ über Ω vervollständigt werden kann!

Hinweis: Gehen Sie folgendermaßen vor:
Man definiere

$$\mathfrak{A}_0 := \{A \in \wp(\Omega) \mid (\exists C_A, D_A \in \mathfrak{A}) : C_A \subset A \subset D_A,\ \mu(D_A \backslash C_A) = 0\},$$

$$\mu_0 : \mathfrak{A}_0 \to [0; \infty] \text{ mit } \mu_0(A) := \mu(C_A)$$

und rechne die geforderten Eigenschaften nach.

30. Aufgabe (Dirac-Maß und Heavyside-Funktion)
Beweisen Sie Beispiel 2.29 ii) der Vorlesung!

31. Aufgabe (Lebesgue-Stieltjes-Maß)
Gegeben sei die isotone, linksseitig stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := \begin{cases} -1 & \text{falls} \quad x \leqslant -1 \\ \frac{1}{2} \cdot x & \text{falls} \quad -1 < x \leqslant 0 \\ x^2 + 1 & \text{falls} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ x + 2 & \text{falls} \quad 1 < x \end{cases}$$

a) Berechnen Sie das Lebesgue-Stieltjes-Maß λ_g folgender Mengen:
   i) $\{-1\}$; $\{0\}$; $\{1\}$
   ii) $]-1, 0[$; $]-1, 0]$; $[-1, 0[$; $[-1, 0]$
   iii) $]0, 1[$; $]0, 1]$; $[0, 1[$; $[0, 1]$
   iv) $]-1, 1[$; $]-1, 1]$; $[-1, 1[$; $[-1, 1]$
   v) $[-2, 2]$; $]-1, 3]$

b) Zerlegen Sie g gemäß Satz 2.34 der Vorlesung in einen stetigen Anteil g_c und eine Sprungfunktion g_d, so dass $g = g_c + g_d$ gilt. Geben Sie außerdem λ_g^d explizit an.

32. Aufgabe (Beispiele messbarer Funktionen)
Beweisen Sie die Aussagen i) und ii) von Beispiel 3.2 der Vorlesung.

33. Aufgabe (Beispiele messbarer und nicht-messbarer Funktionen)
Man überlege sich Beispiele für Messräume $(\Omega, \mathfrak{A})$ und Abbildungen $f : \Omega \to \mathbb{R}$, so dass

a) f messbar ist, aber ein $A \in \mathfrak{A}$ mit $f(A) \notin \mathfrak{B}$ existiert,

b) $|f|$ messbar ist, obwohl f nicht messbar ist.

Hinweis: Für Teil a) beachte man Satz 3.23 der Vorlesung.

34. Aufgabe (Messbarkeit und differenzierbare Funktionen)
Zeigen Sie, dass für eine differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Abbildungen g und g' borelmessbar sind.

35. Aufgabe (Messbarkeit und Bildmaß einer Abbildung)
Der Maßraum $(\mathbb{R}, \mathfrak{A}, \mu)$ sei wie in Beispiel 2.3 iv) der Vorlesung gewählt, d.h.

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &:= \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ abzählbar} \vee \complement A \text{ abzählbar }\} \\ \mu(A) &:= \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ abzählbar} \\ 1 & \text{falls } \complement A \text{ abzählbar} \end{cases}, \end{aligned}$$

der Messraum $(\Omega', \mathfrak{A}')$ mit $\Omega' := \{0, 1\}, \mathfrak{A}' := \wp(\Omega')$ sowie die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \Omega'$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbar ist.

b) Bestimmen Sie das Bildmaß $f(\mu)$.

36. Aufgabe (Zusammengesetzte numerische Funktionen)
Auf einem Messraum $(\Omega, \mathfrak{A})$ sei die reelle Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathfrak{A}$-messbar. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen $\mathfrak{A}$-messbar sind.

a) $\omega \mapsto \exp(f(\omega))$ b) $\omega \mapsto \sin(f(\omega))$

37. Aufgabe (Messbarkeit numerischer Funktionen)
Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 4.2 der Vorlesung dahingehend, dass sie mit Hilfe der dort gegebenen Hinweise den Nachweis für die Äquivalenzen i) – iv) von Satz 4.2 a) sowie die Aussage von Satz 4.2 b) genauer ausführen.

38. Aufgabe (Messbarkeit des Maximumoperators)
Zeigen Sie mit Satz 4.2 a) i) der Vorlesung, dass die folgende Funktion $\mathfrak{B}^2$-messbar ist:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad , \quad (x, y) \mapsto \max(x, y)$$

39. Aufgabe (Dirichletsche Sprungfunktion)
Ist die auf $\mathbb{R}$ definierte Dirichletsche Sprungfunktion $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ eine $\mathfrak{B}^1$-Elementarfunktion?

40. Aufgabe (Integration bzgl. des Dirac-Maßes)

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Messraum und ϵ_ω das Dirac-Maß auf Ω für ein $\omega \in \Omega$.

a) Zeigen Sie, dass für jede nichtnegative, $\mathfrak{A}$-messbare numerische Funktion f gilt:

$$\int_\Omega f d\epsilon_\omega = f(\omega)$$

b) Geben Sie die Menge aller $\mathfrak{A}$-messbaren numerischen Funktionen g an, die ϵ_ω-integrierbar sind.

41. Aufgabe (Integration numerischer Funktionen auf $\mathbb{N}$)

Es sei der Messraum $(\mathbb{N}, \wp(\mathbb{N}))$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\alpha_n \in \bar{\mathbb{R}}_+$ gegeben. Zeigen Sie:

a) Durch $\mu(\{n\}) := \alpha_n$ wird auf $\wp(\mathbb{N})$ ein Maß μ definiert.

b) Jede nichtnegative numerische Funktion f auf $\mathbb{N}$ ist messbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\alpha_n.$$

c) Geben Sie die Menge aller numerischen Funktionen g auf $\mathbb{N}$ an, welche μ-integrierbar sind.

42. Aufgabe (Integration bzgl. einer Folge von Maßen)

Gegeben sei eine Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Maßen auf dem Messraum $(\Omega, \mathfrak{A})$. Zeigen Sie:

a) $\mu := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_n$ ist ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$.

b) Ist f eine nichtnegative, $\mathfrak{A}$-messbare numerische Funktion auf Ω, so gilt

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f d\mu_n.$$

43. Aufgabe (Integrierbarkeit bzgl. endlicher Maße)

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum mit endlichem Maß μ. Zeigen Sie, dass jede konstante reellwertige Funktion auf Ω μ-integrierbar ist, und folgern Sie, dass sogar jede beschränkte, $\mathfrak{A}$-messbare reelle Funktion auf Ω μ-integrierbar ist.

44. Aufgabe (Lebesgue-Integrierbarkeit)

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

über dem Intervall $[0,1]$ Lebesgue-integrierbar ist und berechnen Sie das Integral bezüglich des L-B-Maßes λ^1.

Zusatz: Zeigen Sie, dass f über $[0,1]$ nicht Riemann-integrierbar ist.

45. Aufgabe (Riemann- und Lebesgue-Integrierbarkeit)

Für $a < b$ sei die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Beweisen Sie mit Hilfe des Lemmas von Fatou und des Satzes von der majorisierten Konvergenz, dass f dann über $[a, b]$ auch Lebesgue-integrierbar ist und des weiteren gilt:

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda^1 = \int_a^b f(x) \, dx.$$

46. Aufgabe (Lebesgue-Integrierbarkeit)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f : \,]0, \infty[\to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \frac{\sin x}{x}$$

über ihrem Definitionsbereich

a) **nicht** Lebesgue-integrierbar ist

b) uneigentlich Riemann-integrierbar ist.