Maß-, Integrations- & Wahrscheinlichkeitstheorie

Vorlesung an der
Universität des Saarlandes

Version 9.1

Klaus Schindler

Für A . . .

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die Begriffe Länge, Fläche und Volumen erscheinen so intuitiv, dass man damit - wie die Mathematiker vergangener Jahrhunderte - ausschließlich die Frage nach ihrer Berechnung bei komplizierten geometrischen Objekten, wie z.B. Kreis, Ellipse oder Kugel verbindet. Dies gilt allgemein für das Maß mehr oder minder anderer anschaulicher Größen, sei es im täglichen Leben (Gewicht, Preis eines Gutes, Wert einer Immobilie) oder in der Naturwissenschaft (elektrische Ladung, magnetisches Feld, Trägheitsmoment, ...).

Auf Grund dieser intuitiven Zugänglichkeit stellte man sich erst relativ spät die Existenzfrage, d.h. was unter diesen scheinbar so selbstverständlichen Begriffen zu verstehen ist und welche Eigenschaften ihnen inne wohnen. Mit der Mengenlehre stand schließlich ein allgemeiner Rahmen zur Verfügung, um diese Probleme zu bewältigen. Aus Sicht der abstrakten Mengenlehre besteht die Aufgabe einer solchen „Maßtheorie“ darin, ein allgemeines Konzept zu liefern, um die „Bedeutung“, die „Größe“ oder den „Wert“ von Mengen durch Angabe einer geeigneten Maßzahl zu bestimmen. Dabei fordert man zweckmäßigerweise von einem solchen Messvorgang, dass er im Spezialfall der Geometrie auf die bekannten Flächen- bzw. Volumenformeln führt.

Die praktische Umsetzung der Maßtheorie erfolgt dadurch, dass man die Mengen und deren Maßzahl geeignet interpretiert. Fasst man die Mengen als geometrische Körper auf, liefert das Maß die Länge, Fläche oder das Volumen des geometrischen Objektes. Interpretiert man die Mengen als Ereignisse und deren Maßzahl als Eintrittswahrscheinlichkeit, erhält man die Wahrscheinlichkeitstheorie, bei der die zu Grunde liegende Gesamtmenge das Maß 1 hat, als spezielle Anwendung der Maßtheorie. Alleine das letzte Beispiel zeigt, dass die Bedeutung der Maßtheorie weit über die klassische Interpretation hinaus geht.
Die Interpretation des Integrals einer Funktion als Fläche bzw. Volumen zeigt außerdem, dass Maß- und Integrationstheorie eng zusammenhängende Theorien sind. Beide können als zueinander dual aufgefasst werden, d.h. mit Hilfe eines vorgegebenen Maßes kann ein zugehöriger Integralbegriff aufgebaut werden. Andererseits lässt sich aus einem vorgegebenen Integralbegriff ein zugehöriges Maß konstruieren.

Ausgangspunkt der Maß- und Integrationstheorie waren Unvollkommenheiten des klassischen Flächen- bzw. Volumenmaßes und in Analogie hierzu Unvollkommenheiten des klassischen Riemannschen Integralbegriffs. So ist es zwar möglich, die Länge des Intervalls $[a, b]$ zu berechnen, jedoch ist unklar, welche „Länge“ dieses Intervall hat, wenn man

die rationalen Zahlen daraus entfernt, d.h. wenn man die Menge $[a, b] \setminus \mathbb{Q}$ betrachtet[1]. Das analoge Problem tritt auf, wenn man versucht, das Riemann-Integral der Funktion auf $[a, b]$ zu bestimmen, die in rationalen Stellen den Wert 0 und sonst den Wert 1 annimmt. Diese Schwierigkeiten führen u.a. dazu, dass Grenzwert- und Integralbildung beim Riemann-Integral i.A. nicht ohne weiteres vertauscht werden dürfen. Die Bedeutung solcher Überlegungen alleine für die Wahrscheinlichkeitstheorie zeigt, dass es sich bei der Maßtheorie nicht um philosophische Spielerei oder mathematischen Genauigkeitswahn handelt.
Sieht man die Maßtheorie als Grundlage der Integrationstheorie an, liegt die Ursache für die zu geringe Anzahl integrierbarer Funktionen in der zu geringen Zahl von Mengen, denen man eine Fläche bzw. ein Volumen zuordnen kann. In der Maßtheorie wird man also - ausgehend von einem Elementarmaß - versuchen, die Zahl solcher „messbarer“ Mengen zu erhöhen. Analog wird man in der Integrationstheorie - ausgehend von einem Elementarintegral - versuchen, die Zahl der integrierbaren Funktionen zu vergrößern. Beide Erweiterungsvorgänge lassen sich mit der Vervollständigung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ vergleichen. Wegen der bijektiven Korrespondenz zwischen Mengen M und den zugehörigen Indikatorfunktionen $\mathbb{1}_M$ ist das „Maß“ einer Menge M gleich dem „Integral“ der Indikatorfunktion $\mathbb{1}_M$, so dass beide Vorgänge dual zueinander sind, d.h. eine Vervollständigung des Elementarmaßes führt zu einer Vervollständigung des zugehörigen Integrals und umgekehrt.

[1] Das zugehörige praktische Problem könnte z.B. lauten, die Länge einer Küstenlinie zu bestimmen. Hierbei wird man unweigerlich auf das Problem stoßen, dass diese Länge um so größer wird, je genauer und feiner man misst.

1. Mengensysteme

Geometrisch einfachen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, wie z.B. Strecken, Rechtecken oder Quadern, ordnet man „Maßzahlen“ zu, die Länge, Fläche und Volumen genannt werden. Mit Hilfe mehr oder minder akzeptabler Rechenregeln für diese Maßzahlen ist es möglich, die Länge, Fläche bzw. das Volumen von Mengen zu berechnen, die sich aus diesen Elementarmengen zusammensetzen. Als wesentliche Rechenregel erweist sich hier die sog. *Additivität*:

I) Sind M_1 und M_2 disjunkte Mengen mit den Maßzahlen α und β, so besitzt die Menge $M_1 \cup M_2$ die Maßzahl $\alpha + \beta$.

Setzt man die Fläche von Rechtecken als definiert voraus[1], ist es möglich, die Fläche von Dreiecken zu berechnen, indem man Rechtecke in zwei flächengleiche Dreiecke zerlegt.
Die Grenzen dieser elementargeometrischen Betrachtung werden bereits bei der Definition der Fläche einer Kreisscheibe K erreicht. Die Flächenberechnung erfolgt in diesem Fall dadurch, dass man K als abzählbare disjunkte Vereinigung von Elementarflächen (z.B. Dreiecke oder Rechtecke) darstellt und die Additivität I) zur sog. *σ-Additivität* erweitert:

II) Ist $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen mit der Fläche (Maßzahl) α_n, so besitzt die Menge $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ die Maßzahl $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.

Ein Merkmal und Nachteil der elemtargeometrischen Betrachtungsweise ist die speziell auf die jeweilige Menge K zugeschnittene Methode, um zu einer brauchbaren Definition einer Maßzahl für K zu gelangen.
Die Suche nach einer allgemeinen Methode, mit deren Hilfe möglichst vielen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ein n-dimensionales Volumen zugeordnet werden kann, hat letzten Endes die Maßtheorie in Gang gebracht. Hinter diesem Begriff verbirgt sich also das umfassende Problem, abstrakte Mengen zu „messen“, d.h. für möglichst viele Teilmengen M einer vorgegebenen Grundmenge ein Maß $\mu(M)$ festzulegen[2]. Rechenregel II) stellt

[1] Hier wird die Willkür bei der Flächen- und analog Längen bzw. Volumenberechnung deutlich. Würde man Dreiecke als grundlegende Elementarflächen ansehen, müsste man dem „Einheitsdreieck“ mit Grundseite 1 und Höhe 1 die Fläche 1 zuordnen, was zur Rechtecksfläche „$2 \cdot$Länge$\cdot$Breite“ führen würde. Betrachtet man Kreise als grundlegende Elementarflächen würde die Fläche des Einheitskreises als 1 definiert und die Zahl π würde bei Rechtecksflächen auftauchen.

[2] Dieses Maß kann unterschiedliche Interpretationen haben. Beispiele sind Längen-, Flächen-, Volumen- oder Wahrscheinlichkeitsmaße.

hierzu den Schlüssel dar, da diese für wesentlich allgemeinere - von der geometrischen Anschauung weitgehend losgelöste - Maßzahlen anwendbar ist. Wir führen das Maß daher als natürliche Verallgemeinerung des geometrischen Inhaltes ein, indem wir die wesentlichen Eigenschaften der Fläche und des Volumens per Definition von einem Maß fordern. Ein Grundproblem ist, dass $\mu(M)$ i.A. nicht für alle Teilmengen M definierbar ist, wenn das Maß μ diese „natürlichen" Bedingungen erfüllen soll. In den nachfolgenden Kapiteln bezeichne Ω die fest vorgegebene Menge, deren Teilmengen wir „messen" wollen.

Bezeichnung 1.1
Ist $\mathfrak{M} \subset \wp(\Omega)$ ein System von Teilmengen von Ω, so verwenden wir für besonders häufig auftretende Mengeneigenschaften folgende Notationen in diesem Kapitel.

Notation	Eigenschaft	Notation	Eigenschaft
(N)	$\emptyset \in \mathfrak{M}$	(N′)	$\Omega \in \mathfrak{M}$
(C)	$M \in \mathfrak{M} \Rightarrow \Omega \backslash M \in \mathfrak{M}$	(C′)	$N, M \in \mathfrak{M} \Rightarrow N \backslash M \in \mathfrak{M}$
(V)	$N, M \in \mathfrak{M} \Rightarrow N \cup M \in \mathfrak{M}$	(V′)	$N, M \in \mathfrak{M} \Rightarrow N \cap M \in \mathfrak{M}$
(V_σ)	$M_1, M_2, \dots \in \mathfrak{M} \Rightarrow \bigcup_{\ell=1}^{\infty} M_\ell \in \mathfrak{M}$	(V'_σ)	$M_1, M_2, \dots \in \mathfrak{M} \Rightarrow \bigcap_{\ell=1}^{\infty} M_\ell \in \mathfrak{M}$

Ein Mengensystem, das Eigenschaft (V) bzw. (V′) erfüllt, heißt *vereinigungs-* bzw. *durchschnittsstabil*. In diesem Fall ist das Mengensystem abgeschlossen bzgl. der Bildung endlicher Vereinigungen bzw. Durchschnitte[3]. ❑

1.1. Algebren und σ-Algebren

Wie zu Beginn erläutert liegt es nahe, Mengensysteme zu betrachten, die bzgl. abzählbarer Vereinigung abgeschlossen sind. Sie treten später als Definitionsbereich von Maßen auf und können geometrisch interpretiert werden. Im Fall der Wahrscheinlichkeitstheorie besitzen sie noch einen „informationstheoretischen" Charakter, da sie die Ereignisstruktur des zugrundeliegenden Zufallsexperiments modellieren, d.h. die logischen Beziehungen zwischen Aussagen, welche sich über den Ausgang des Zufallsexperiments machen lassen. In diesem Fall nennt man die Elemente dieser Mengensysteme auch Ereignisse.

Definition 1.2
Ein System $\mathfrak{A}$ von Teilmengen einer Menge Ω heißt eine *Algebra* über Ω, wenn es die Eigenschaften (N), (C) und (V) erfüllt. Gilt statt (V) sogar die stärkere Eigenschaft (V_σ) spricht man von einer *σ-Algebra*[4] und bezeichnet das Paar $(\Omega, \mathfrak{A})$ als *Messraum*. ❑

[3] Um Verwechslungen mit dem topologischen Abschluss von Mengen (siehe Definition D.6 im mathematischen Anhang) zu vermeiden, wird auf die Schreibweise $\overline{M}$ für das Mengenkomplement von M verzichtet.

[4] Bei den Wörtern σ-Algebra und σ-Ring weist der Zusatz „σ" darauf hin, dass das betreffende Mengensystem bezüglich der Bildung abzählbarer Vereinigungen abgeschlossen ist. Der Buchstabe σ erinnert

Beispiel 1.3

i) Für jede Menge Ω ist $\wp(\Omega)$ eine σ-Algebra. Es ist die größte σ-Algebra über Ω. Im Gegensatz hierzu ist $\{\emptyset, \Omega\}$ die kleinste σ-Algebra über Ω.

ii) Jede σ-Algebra ist eine Algebra. Ist Ω endlich, gilt auch die Umkehrung dieser Aussage.

iii) Ist $|\Omega|$ unendlich, so ist $\mathfrak{A} := \{A \subset \Omega \mid A \text{ endlich oder } \complement A \text{ endlich}\}$ eine Algebra, aber keine σ-Algebra.
Beweis: Sei $\{\omega_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Teilmenge von Ω. Dann ist die Menge $A := \{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \dots\} = \{\omega_{2j} \mid j \in \mathbb{N}\}$ nicht in $\mathfrak{A}$, da weder A noch $\complement A$ endliche Mengen sind. Die einelementigen Mengen $\{\omega_{2j}\}$ liegen daher in $\mathfrak{A}$, nicht jedoch deren Vereinigung.

iv) $\mathfrak{A} := \{A \subset \Omega \mid A \text{ abzählbar oder } \complement A \text{ abzählbar}\}$ ist eine σ-Algebra. (Übung)

v) Ist $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra über Ω und $\Omega' \subset \Omega$, so ist

$$\Omega' \cap \mathfrak{A} := \{\Omega' \cap A \mid A \in \mathfrak{A}\}$$

eine σ-Algebra in Ω', die sogenannte *Spur von* $\mathfrak{A}$ *in* Ω'. Gilt $\Omega' \in \mathfrak{A}$, so besteht $\Omega' \cap \mathfrak{A}$ aus allen zu $\mathfrak{A}$ gehörenden Teilmengen von Ω'.

vi) Sei $T : \Omega' \to \Omega$ eine Abbildung und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Dann ist das System

$$T^{-1}(\mathfrak{A}) := \{T^{-1}(A) \mid A \in \mathfrak{A}\}$$

eine σ-Algebra in Ω'. (Übung)

vii) Ist $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra über Ω und $T : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung, so ist

$$\mathfrak{A}' := \{A' \subset \Omega' \mid T^{-1}(A') \in \mathfrak{A}\}$$

die größte σ-Algebra in Ω' mit der Eigenschaft $T^{-1}(\mathfrak{A}') \subset \mathfrak{A}$. ❐

Analog zu dem Begriff der Topologie, wo eine Menge genau dann offen ist, wenn ihr Komplement abgeschlossen ist, gibt es eine duale Definition für Algebren bzw. σ-Algebren.

Satz 1.4

a) $\mathfrak{A} \subset \wp(\Omega)$ ist genau dann eine Algebra bzw. σ-Algebra über Ω, wenn die Eigenschaften (N′), (C′) und (V′) bzw. (V'_σ) erfüllt sind. Insbesondere ist jede Algebra abgeschlossen bzgl. Differenzbildung.

---

daran, dass früher die Vereinigung von Mengen als „*Summe*" bezeichnet wurde. Eine entsprechende Terminologie verwendet bei abzählbaren Durchschnitten den Buchstaben „δ", z.B. δ-Ring.

b) Jeder Durchschnitt von Algebren bzw. σ-Algebren über Ω ist wieder eine Algebra bzw. σ-Algebra über Ω. ❑

Beweis:
Die Behauptungen ergeben sich direkt aus den Rechenregeln für Mengen. ■

Folgerung 1.5
Ist $\mathfrak{E} \subset \wp(\Omega)$, so existiert die eindeutig bestimmte kleinste Algebra, die $\mathfrak{E}$ umfasst. Man nennt sie die *von $\mathfrak{E}$ erzeugte Algebra* und schreibt $\boldsymbol{\alpha}(\mathfrak{E})$. $\boldsymbol{\alpha}(\mathfrak{E})$ ist der Durchschnitt aller Algebren, die $\mathfrak{E}$ enthalten. Entsprechend bezeichnet $\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{E})$ die eindeutig bestimmte kleinste σ-Algebra, die $\mathfrak{E}$ umfasst. $\mathfrak{E}$ heißt ein *Erzeuger* der Algebra bzw. der σ-Algebra $\mathfrak{A}$, wenn $\boldsymbol{\alpha}(\mathfrak{E}) = \mathfrak{A}$ bzw. $\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{E}) = \mathfrak{A}$ gilt. ❐

Beweis:
Der Durchschnitt aller $\mathfrak{E}$ enthaltenden Algebren bzw. σ-Algebren ist nichtleer, nach Satz 1.4 b) eine Algebra bzw. σ-Algebra und besitzt die gewünschten Eigenschaften. ■

Bemerkung 1.6
Ist $\mathfrak{E}$ eine σ-Algebra, so gilt $\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{E}) = \mathfrak{E}$. ❐

Beispiel 1.7

i) Ist $\mathfrak{E} = \{A\}$ mit $A \subset \Omega$, so gilt $\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{E}) = \{\emptyset, \Omega, A, \complement A\}$.

ii) Die σ-Algebra $\mathfrak{A} = \{A \subset \Omega \mid A \text{ abzählbar oder } \complement A \text{ abzählbar}\}$ aus Beispiel 1.3 iv) wird vom System der endlichen Teilmengen von Ω erzeugt. (Übung) ❐

1.2. Ringe und Halbringe

Da sich σ-Algebren i.A. nicht durch direktes Hinschreiben der Elemente angeben lassen, werden sie meistens mit Hilfe eines Erzeugers definiert. Häufig besitzen diese Erzeuger ähnliche Eigenschaften wie σ-Algebren und tragen daher eigene Namen. Die Idee besteht darin, von einfachen Mengensystemen auszugehen und sich dann stufenweise immer größere Mengensysteme zu konstruieren, bis man bei einer σ-Algebra landet.

Definition 1.8

a) Ein System $\mathfrak{R} \subset \wp(\Omega)$ heißt ein *Ring* über Ω, wenn $\mathfrak{R}$ die Eigenschaften (N), (C′) und (V) erfüllt.

b) Ein System $\mathfrak{H} \subset \wp(\Omega)$ heißt ein *Halbring* über Ω, wenn $\mathfrak{H}$ die Eigenschaften (N) und (V′) erfüllt und wenn außerdem für alle A, B in $\mathfrak{H}$ disjunkte Mengen $C_1, \dots, C_m$ in $\mathfrak{H}$ existieren, mit[5]

$$A \setminus B = \dot{\bigcup_{\ell=1}^{m}} C_\ell \, .$$

❐

Folgerung 1.9

a) Jeder Ring ist durchschnittsstabil (Eigenschaft (V′) und damit automatisch ein Halbring.

b) Jeder Durchschnitt von Ringen über Ω ist wieder ein Ring über Ω.[6] Insbesondere existiert zu jedem $\mathfrak{E} \subset \wp(\Omega)$ der kleinste Ring, der $\mathfrak{E}$ umfasst. Man nennt ihn den *von $\mathfrak{E}$ erzeugten Ring* und schreibt $\boldsymbol{\rho}(\mathfrak{E})$. $\boldsymbol{\rho}(\mathfrak{E})$ ist eindeutig bestimmt und gleich dem Durchschnitt aller Ringe, die $\mathfrak{E}$ enthalten. $\mathfrak{E}$ heißt ein *Erzeuger* des Ringes $\mathfrak{R}$, wenn $\boldsymbol{\rho}(\mathfrak{E}) = \mathfrak{R}$ gilt. ❐

Beweis:

a) Wegen $M \setminus N = M \cap \complement N$ gilt für zwei beliebige Mengen A, B eines Ringes $\mathfrak{R}$:

$$A \cap B = A \cap (\complement A \cup B) = A \cap \complement(A \cap \complement B) = A \cap \complement(A \setminus B) = A \setminus (A \setminus B) \in \mathfrak{R}.$$

b) Klar. ■

Bemerkung 1.10

i) Bezeichnet $\triangle$ die symmetrische Differenz von Mengen, definiert durch $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, so ist $\mathfrak{R} \subset \wp(\Omega)$ genau dann ein Ring, wenn eine der folgenden zwei äquivalenten Eigenschaften erfüllt ist:

(1) $\mathfrak{R}$ besitzt die Eigenschaften (N), (V) und ist bzgl. $\triangle$ abgeschlossen.

(2) $\mathfrak{R}$ besitzt die Eigenschaften (N), (V′) und ist bzgl. $\triangle$ abgeschlossen.

Die Äquivalenz dieser Aussagen ergibt sich aus den elementaren Mengentheoretischen Beziehungen

$$\begin{aligned} A \cup B &= (A \triangle B) \triangle (A \cap B) \\ A \cap B &= (A \triangle B) \triangle (A \cup B) \\ A \setminus B &= A \triangle (A \cap B) \end{aligned}$$

[5] Man beachte, dass diese Bedingung trivialerweise erfüllt ist, wenn $A \setminus B$ in $\mathfrak{H}$ liegt.

[6] Dies gilt für Halbringe i.A. nicht.

ii) Der Name Ring rührt daher, dass sich $\mathfrak{R}$ versehen mit den Verknüpfungen $\triangle$ und $\cap$ algebraisch wie die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der Addition und Multiplikation verhält. Da solche Strukturen als Ringe bezeichnet werden[7], hat man diesen Namen übernommen. Ähnliches gilt für den Begriff Algebra.

iii) Die folgende Tabelle fasst äquivalente Definitionsmöglichkeiten für σ-Algebren, Algebren und Ringe nochmals kurz zusammen.

	Notwendige und hinreichende Eigenschaften				
σ-Algebra	$(N),(C),(V_\sigma)$	$(N'),(C'),(V'_\sigma)$	$(N'),(C),(V'_\sigma)$	$(N),(C),(V'_\sigma)$	$(N'),(C),(V_\sigma)$
Algebra	$(N),(C),(V)$	$(N'),(C'),(V')$	$(N'),(C),(V')$	$(N),(C),(V')$	$(N'),(C),(V)$
Ring	$(N),(C'),(V)$	$N,\triangle,V$	$N,\triangle,(V')$		

❐

Beispiel 1.11

i) $\mathfrak{R} := \{\emptyset\}$ ist der kleinste Ring über Ω.

ii) $\mathfrak{R} := \{A\subset\Omega \mid A \text{ endlich}\}$ ist ein Ring. $\mathfrak{R}$ ist genau dann eine Algebra wenn Ω endlich ist.

iii) $\mathfrak{H} := \{\emptyset\} \cup \Big\{\{\omega\} \Bigm| \omega\in\Omega\Big\}$ ist ein Halbring über Ω. $\mathfrak{H}$ erzeugt den Ring der endlichen Teilmengen von Ω aus Teil ii) dieses Beispiels.

iv) $\mathfrak{J}^1 := \Big\{[a,b[\Bigm| a,b\in\mathbb{R}\Big\}$, $\mathfrak{J}^1_{\mathbb{Q}} := \Big\{[a,b[\Bigm| a,b\in\mathbb{Q}\Big\}$, $\tilde{\mathfrak{J}}^1 := \Big\{]a,b] \Bigm| a,b\in\mathbb{R}\Big\}$ sowie das Mengensystem $\tilde{\mathfrak{J}}^1_{\mathbb{Q}} := \Big\{]a,b] \Bigm| a,b\in\mathbb{Q}\Big\}$ sind Halbringe über $\mathbb{R}$. Sie spielen vor allem bei der Konstruktion des Lebesgue-Maßes (siehe Korollar 2.23) eine große Rolle. ❐

Satz 1.12

Für $i = 1,\dots,n$ seien $\mathfrak{H}_i$ Halbringe über den Mengen Ω_i. Dann ist

$$\mathfrak{H}_1 * \mathfrak{H}_2 * \cdots * \mathfrak{H}_n := \Big\{H_1\times H_2\times\cdots\times H_n \Bigm| H_i\in\mathfrak{H}_i \ (i = 1,\dots,n)\Big\}$$

ein Halbring über dem Kreuzprodukt $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$. ❐

Beweis:

Es genügt, den Fall $n = 2$ zu betrachten. Zunächst gilt $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathfrak{H}_1 * \mathfrak{H}_2$. Wegen

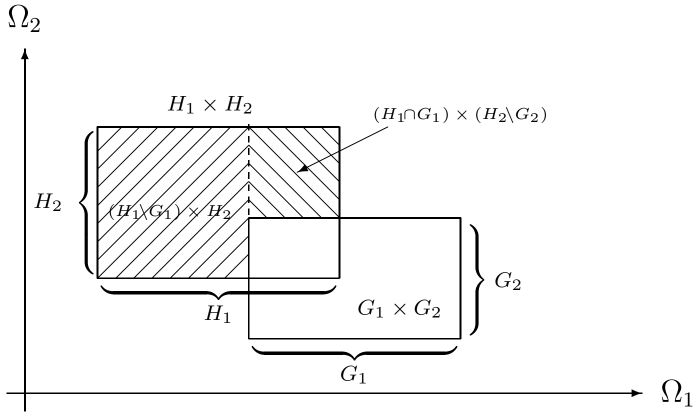
$$(H_1\times H_2) \cap (G_1\times G_2) = (H_1\cap G_1) \times (H_2\cap G_2)$$

ist $\mathfrak{H}_1 * \mathfrak{H}_2$ durchschnittsstabil, weil $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ nach Definition eines Halbringes durchschnittsstabil sind. Außerdem gilt

$$(H_1\times H_2) \setminus (G_1\times G_2) = \Big[(H_1\setminus G_1) \times H_2\Big] \uplus \Big[(H_1\cap G_1) \times (H_2\setminus G_2)\Big],$$

wobei die Mengen auf der rechten Seite disjunkt sind (siehe Skizze).

[7]Weitere typische algebraische Strukturen sind z.B. Gruppen, Körper, Vektorräume, Algebren, ...



Da sich $H_1 \backslash G_1$ und $H_2 \backslash G_2$ als disjunkte Vereinigung von Elementen aus $\mathfrak{H}_1$ bzw. $\mathfrak{H}_2$ schreiben lassen, ist die Menge $(H_1 \times H_2) \setminus (G_1 \times G_2)$ darstellbar als disjunkte Vereinigung von Elementen aus $\mathfrak{H}_1 * \mathfrak{H}_2$. ■

Beispiel 1.13

Wählt man in Satz 1.12 speziell $\mathfrak{H}_1 = \cdots = \mathfrak{H}_n = \mathfrak{J}^1$ ergibt sich über $\mathbb{R}^n$ der Halbring

$$\mathfrak{J}^n := \mathfrak{J}^1 * \mathfrak{J}^1 * \cdots * \mathfrak{J}^1 = \left\{ I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \;\middle|\; I_1, \ldots, I_n \in \mathfrak{J}^1 \right\}.$$

$\mathfrak{J}^n$ lässt sich wie im 1-dimensionalen Fall mit Hilfe einer Ordnung charakterisieren. Wir definieren hierzu in $\mathbb{R}^n$ für Punkte $\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $\boldsymbol{b} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ die Relation $\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{b}$ bzw. $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ durch[8]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{b} \quad &\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall i : \alpha_i \leqslant \beta_i \quad \text{bzw.} \\ \boldsymbol{a} < \boldsymbol{b} \quad &\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall i : \alpha_i < \beta_i \end{aligned}$$

Das *nach rechts halboffene Intervall* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ ist definiert als die Menge

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}\},$$

mit der Konvention $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[\; = \emptyset$ im Fall $\boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{a}$. Offensichtlich gilt dann die Beziehung $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[\; = \; [\alpha_1, \beta_1[\times [\alpha_2, \beta_2[\times \cdots \times [\alpha_n, \beta_n[$ und es folgt:

$$\mathfrak{J}^n = \left\{ [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[\;\middle|\; \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

$\mathfrak{J}^n$ ist also der Halbring aller nach rechts halboffenen n-dimensionalen Intervalle. ❐

Es gilt folgende Verschärfung von Definition 1.8 b), die wir u.a. für Satz 1.15 benötigen. Wie alle folgenden Aussagen ist sie durch den Halbring $\mathfrak{J}^n$ motiviert.

Lemma 1.14

In jedem Halbring $\mathfrak{H}$ gelten folgende Aussagen:

[8] Es sei hier vorsorglich darauf hingewiesen, dass im Bereich der linearen Optimierung oder bei Präferenzordnungen die Beziehung $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$ häufig durch $\alpha_i \leqslant \beta_i$ und $\alpha_{i_0} < \beta_{i_0}$ für mindestens ein i_0 definiert wird.

a) Sind $A, B_1, \dots, B_n$ Mengen in $\mathfrak{H}$, existieren disjunkte Mengen $C_1, \dots, C_m$ in $\mathfrak{H}$ mit

$$A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} B_j = \dot{\bigcup_{\ell=1}^{m}} C_\ell$$

b) Sind $A_1, \dots, A_n$ Mengen aus $\mathfrak{H}$, so existieren disjunkte Mengen $B_1, \dots, B_p$ in $\mathfrak{H}$, so dass jede Menge A_k Vereinigung gewisser Mengen B_j ist. ❑

Beweis:

a) Der Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion nach n. Nach Definition von Halbringen ist der Fall $n = 1$ klar. Gilt nun

$$A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} B_j = \dot{\bigcup_{\ell=1}^{m}} C_\ell \ ,$$

so folgt der Induktionsschritt aus der Gleichungskette

$$A \setminus \bigcup_{j=1}^{n+1} B_j = \Big(A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} B_j\Big) \setminus B_{n+1} = \Big(\dot{\bigcup_{\ell=1}^{m}} C_\ell\Big) \setminus B_{n+1} = \dot{\bigcup_{\ell=1}^{m}} \big(C_\ell \setminus B_{n+1}\big) \ .$$

b) Der Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion nach n. Für $n{=}1$ setze $B_1 := A_1$. Gelte die Behauptung für ein $n{\in}\mathbb{N}$ und seien $A_1, \dots, A_{n+1}$ Mengen aus dem Halbring $\mathfrak{H}$. Nach Induktionsvoraussetzung existieren disjunkte Mengen $B_1, \dots, B_p$ in $\mathfrak{H}$, so dass jede Menge A_k $(k = 1, \dots, n)$ Vereinigung gewisser Mengen B_j ist. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

1. Fall: Es ist $A_{n+1} \not\subset \dot{\bigcup}_{j=1}^{p} B_j$. Stellt man $A_{n+1} \setminus \dot{\bigcup}_{j=1}^{p} B_j$ nach Teil a) als disjunkte Vereinigung von Mengen $C_1, \dots, C_m$ in $\mathfrak{H}$ dar, kann jede Menge A_j $(j = 1, \dots, n{+}1)$ mit Hilfe der disjunkten Mengen $B_1, \dots, B_p, C_1, \dots, C_m$ dargestellt werden.

2. Fall: Es gilt $A_{n+1} \subset \dot{\bigcup}_{j=1}^{p} B_j$. Dann sind $B_1 \cap A_{n+1}, B_1 \setminus A_{n+1}, \dots, B_p \cap A_{n+1}, B_p \setminus A_{n+1}$ paarweise disjunkt. Nach Eigenschaft (V') liegen die Mengen $B_j \cap A_{n+1}$ in $\mathfrak{H}$. Die Mengen $B_j \setminus A_{n+1}$ lassen sich für $j = 1, \dots, p$ zudem als disjunkte Vereinigung von Mengen $C_1^{(j)}, \dots, C_{m_j}^{(j)}$ aus $\mathfrak{H}$ darstellen. Damit erfüllen die Mengen

$$B_j \cap A_{n+1}, C_1^{(j)}, \dots, C_{m_j}^{(j)} \quad (j = 1, \dots, p)$$

die gewünschten Voraussetzungen. ■

Satz 1.15

Ist $\mathfrak{H}$ ein Halbring über Ω, so gilt für den von $\mathfrak{H}$ erzeugten Ring $\boldsymbol{\rho}(\mathfrak{H})$:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathfrak{H}) = \left\{ \dot{\bigcup_{\ell=1}^{n}} H_\ell \;\middle|\; H_1, \dots, H_n \in \mathfrak{H} \text{ disjunkt} \right\}$$

❑

Beweis:
Sei $\mathfrak{R} := \left\{ \biguplus_{\ell=1}^{n} H_\ell \;\middle|\; H_1, \ldots, H_n \in \mathfrak{H} \text{ disjunkt} \right\}$. Offensichtlich gilt $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{R} \subset \boldsymbol{\rho}(\mathfrak{H})$, so dass wir nur noch zeigen müssen, dass $\mathfrak{R}$ ein Ring ist. Wegen $\emptyset \in \mathfrak{H} \subset \mathfrak{R}$ ist Eigenschaft (N) erfüllt. Zum Nachweis von Eigenschaft (C') seien $A, B \in \mathfrak{R}$ beliebig. Nach Definition von $\mathfrak{R}$ existieren $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_n$ in $\mathfrak{H}$ mit

$$A = \biguplus_{\ell=1}^{k} A_\ell \ , \quad B = \biguplus_{j=1}^{n} B_j .$$

Daraus folgt insbesondere, dass $\mathfrak{R}$ durchschnittsstabil ist (Eigenschaft (V')), denn es ist

$$A \cap B = \biguplus_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} (A_\ell \cap B_j) \ .$$

Weiter gilt

$$A \setminus B = \bigcup_{\ell=1}^{k} \Big(A_\ell \setminus \biguplus_{j=1}^{n} B_j \Big).$$

Da nach Lemma 1.14 a) die Mengen $A_\ell \setminus \biguplus_{j=1}^{n} B_j$ als disjunkte Vereinigung von Elementen aus $\mathfrak{H}$ dargestellt werden können, gilt dies wegen der Disjunktheit der Mengen A_ℓ auch für $A \setminus B$, d.h. es ist $A \setminus B \in \mathfrak{R}$. Aus Symmetriegründen gilt auch $B \setminus A \in \mathfrak{R}$, so dass die Vereinigungssstabilität von $\mathfrak{R}$ sich aus der folgenden Beziehung ergibt:

$$A \cup B = (A \setminus B) \uplus (B \setminus A) \uplus (A \cap B)$$

■

Beispiel 1.16
Den von $\mathfrak{J}^n$ erzeugte Ring $\boldsymbol{\rho}(\mathfrak{J}^n)$ bezeichnen wir im Folgenden mit $\mathfrak{F}^n$. Seine Elemente werden als *n-dimensionale Figuren* bezeichnet. Da jeder Ring vereinigungsstabil ist, stimmt $\mathfrak{F}^n$ überein mit dem System aller Mengen, die als Vereinigung von endlich vielen (nicht notwendigerweise disjunkten) Mengen aus $\mathfrak{J}^n$ entstehen. ❐

1.3. Dynkin-Systeme

Der folgende Typ von Mengensystemen ist oft nützlich, wenn man Schwierigkeiten hat, auf direktem Weg festzustellen, ob ein vorgegebenes Mengensystem eine σ-Algebra ist.

Definition 1.17
Ein System $\mathfrak{D} \subset \wp(\Omega)$ heißt *Dynkin-System* über Ω, wenn $\mathfrak{D}$ die Eigenschaften (N') und (C) erfüllt und außerdem für jede Folge $(D_i)_{i=1}^{\infty}$ paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{D}$ gilt

$$(\mathrm{V}_{\sigma,\,\mathrm{disj}}) : \quad \biguplus_{i=1}^{\infty} D_i \in \mathfrak{D}.$$

❐

Folgerung 1.18
$\mathfrak{D}$ ist genau dann ein Dynkin-System über Ω, wenn es die Eigenschaften (N') und $(\mathrm{V}_{\sigma,\,\mathrm{disj}})$ besitzt und zusätzlich abgeschlossen bzgl. relativer Komplementbildung ist, d.h. wenn gilt:

$$(\mathrm{C}_{\mathrm{rel}}): \quad A, B \in \mathfrak{D},\ A \subset B \Longrightarrow \complement_B A = B \setminus A \in \mathfrak{D}$$ ❐

Beweis:
Es genügt wegen $\Omega \in \mathfrak{D}$ und $\complement A = \Omega \setminus A$ zu zeigen, dass jedes Dynkin-System die Eigenschaft $(\mathrm{C}_{\mathrm{rel}})$ besitzt.
Seien hierzu A, B in $\mathfrak{D}$ mit $A \subset B$. Da in diesem Fall A und $\complement B$ disjunkt sind, liegt $A \cup \complement B$ und damit auch $\complement(A \cup \complement B) = \complement A \cap B = B \setminus A$ in $\mathfrak{D}$. ■

Bemerkung 1.19
i) Jede σ-Algebra ist automatisch ein Dynkin-System, ein Ring und eine Algebra.

ii) Jeder Durchschnitt von Dynkin-Systemen über Ω ist wieder ein Dynkin-System über Ω. Zu jedem Mengensystem $\mathfrak{E} \subset \wp(\Omega)$ gibt es daher (wie bei σ-Algebren und Ringen) ein kleinstes $\mathfrak{E}$ enthaltendes Dynkin-System $\boldsymbol{\delta}(\mathfrak{E})$. ❐

Die Bedeutung von Dynkin-Systemen liegt vor allem in folgenden Satz.

Satz 1.20
a) Ein Dynkin-System ist genau dann eine σ-Algebra, wenn es durchschnittsstabil ist.

b) Für jedes durchschnittsstabile Mengensystem $\mathfrak{E} \subset \wp(\Omega)$ gilt:

$$\boldsymbol{\delta}(\mathfrak{E}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{E})$$ ❐

Beweis:
a) Da jede σ-Algebra ein durchschnittsstabiles Dynkin-System ist, bleibt nur zu zeigen, dass jedes durchschnittsstabile Dynkin-System $\mathfrak{D}$ eine σ-Algebra ist. Hierzu ist nur noch nachzuweisen, dass $\mathfrak{D}$ abgeschlossen bzgl. abzählbaren Vereinigungen ist.

Sind A, B in $\mathfrak{D}$, so liegt aufgrund der Durchschnittsstabilität $A \cap B$ in $\mathfrak{D}$ und wegen Eigenschaft $(\mathrm{C}_{\mathrm{rel}})$ auch $B \setminus (A \cap B)$. Aufgrund der Disjunktheit von A und $B \setminus (A \cap B)$ liegt daher $A \cup (B \setminus (A \cap B)) = A \cup B$ in $\mathfrak{D}$. Folglich ist $\mathfrak{D}$ bzgl. endlichen Vereinigungen abgeschlossen.
Sei nun $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathfrak{D}$. Definiert man $D_0 := \emptyset$ und $D'_n := \bigcup_{j=1}^{n} D_j$ für $n \in \mathbb{N}$, so ist - wie gerade gesehen - auch $(D'_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathfrak{D}$. Wegen $D'_n \subset D'_{n+1}$ folgt nach Eigenschaft $(\mathrm{C}_{\mathrm{rel}})$, dass auch $D'_{n+1} \setminus D'_n$ in $\mathfrak{D}$ liegt für $n \in \mathbb{N}_0$. Da die Mengen $D'_{n+1} \setminus D'_n$

paarweise disjunkt sind, liegt daher nach Eigenschaft ($\mathrm{V}_{\sigma,\mathrm{disj}}$) auch $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(D'_{n+1}\backslash D'_n)$ in $\mathfrak{D}$. Offensichtlich gilt aber $\bigcup\limits_{n=0}^{k}(D'_{n+1}\backslash D'_n) = D'_{k+1} = \bigcup\limits_{j=1}^{k+1} D_j$ und daher

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}(D'_{n+1}\backslash D'_n) = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j.$$

b) Da jede σ-Algebra ein Dynkin-System ist, gilt zunächst

$$\boldsymbol{\delta}(\mathfrak{E}) \subset \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{E}).$$

Für den Nachweis der umgekehrten Teilmengenbeziehung zeigen wir, dass $\boldsymbol{\delta}(\mathfrak{E})$ eine σ-Algebra ist. Nach Teil a) ist daher zu zeigen, dass $\boldsymbol{\delta}(\mathfrak{E})$ durchschnittsstabil ist. Wir betrachten hierzu für eine feste Menge M das Mengensystem[9]

$$\mathfrak{D}_M := \{Q{\in}\wp(\Omega) \mid Q{\cap}M \in \boldsymbol{\delta}(\mathfrak{E})\}$$

und zeigen, dass gilt:

$$\forall D{\in}\mathfrak{E} : \boldsymbol{\delta}(\mathfrak{E}) \subset \mathfrak{D}_D \ .$$

Hierzu weisen wir nach, dass für jedes $D \in \mathfrak{E}$ das Mengensystem $\mathfrak{D}_D$ ein $\mathfrak{E}$ enthaltendes Dynkin-System ist.

(N') $\Omega \in \mathfrak{D}_D$ ist klar, da $\Omega \cap D = D \in \boldsymbol{\delta}(\mathfrak{E})$ gilt.

($\mathrm{C}_{\mathrm{rel}}$) Sind $A, B{\in}\mathfrak{D}_D$ mit $A{\subset}B$, so liegen $A{\cap}D$, $B{\cap}D$ in $\boldsymbol{\delta}(\mathfrak{E})$ nach Definition von $\mathfrak{D}_D$. Wegen $A{\cap}D \subset B{\cap}D$ liegt daher auch $(B{\cap}D) \setminus (A{\cap}D) = (B\backslash A) \cap D$ in $\boldsymbol{\delta}(\mathfrak{E})$, d.h. es gilt $(B\backslash A) \in \mathfrak{D}_D$

($\mathrm{V}_{\sigma,\,\mathrm{disj}}$) Sind $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkte Mengen aus $\mathfrak{D}_D$, so sind auch die Mengen $A_1{\cap}D, A_2{\cap}D, \ldots$ disjunkte Mengen, die nach Definition von $\mathfrak{D}_D$ in $\boldsymbol{\delta}(\mathfrak{E})$ liegen. Damit folgt $\biguplus\limits_{n=1}^{\infty}(A_n{\cap}D) = \Big(\biguplus\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \cap D \in \boldsymbol{\delta}(\mathfrak{E})$, d.h $\biguplus\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{D}_D$.

($\mathfrak{E} \subset \mathfrak{D}_D$) Ist D eine vorgegebene Menge aus $\mathfrak{E}$, so folgt wegen der vorausgesetzten Durchschnittsstabilität von $\mathfrak{E}$:

$$\forall Q{\in}\mathfrak{E} : Q{\cap}D \in \mathfrak{E} \subset \boldsymbol{\delta}(\mathfrak{E}).$$

Daher gilt $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{D}_D$.

Die Durchschnittsstabilität von $\boldsymbol{\delta}(\mathfrak{E})$ ergibt sich nun folgendermaßen. Sind E_1, E_2 beliebige Mengen aus $\boldsymbol{\delta}(\mathfrak{E})$, so gilt

$$E_1 \in \boldsymbol{\delta}(\mathfrak{E}) \subset \mathfrak{D}_{E_2}.$$

Nach Definition von $\mathfrak{D}_{E_2}$ heißt dies gerade $E_1{\cap}E_2 \in \boldsymbol{\delta}(\mathfrak{E})$. ∎

[9] Man spricht vom *Prinzip der guten Mengen*.

Bemerkung 1.21

Ein Dynkin-System ist genau dann durchschnittsstabil, wenn es vereinigungsstabil ist. ❒

2. Maßtheorie

2.1. Inhalt, Prämaß, Maß

Verbindet man die in Kapitel 1 eingeführten Mengensysteme mit den zu Beginn für Länge, Fläche und Volumen eingeführten Additivitätsregeln I), II), entstehen die Grundbegriffe der Maßtheorie. Die Vorgehensweise folgt dabei der Methode zur Flächen- bzw. Volumenberechnung. D.h. wir gehen davon aus, dass für bestimmte Elementarmengen von Ω, die einen Halbring bilden, ein „Inhalt" definiert ist und setzen diesen „Inhalt" auf eine σ-Algebra fort, die die vorgegebenen Elementarmengen umfasst.
Durch die plausible Forderung, dass der Inhalt der leeren Menge 0 ist, wird in der formalen Definition des Begriffes Inhalt berücksichtigt, dass die leere Menge in jedem Halbring liegt, Ω i.a. jedoch nicht, so dass es zunächst nicht möglich ist, Ω einen Inhalt zuzuweisen. Es sei hier nochmals auf die für die Maßtheorie typische Konvention $0 \cdot \infty := 0$ hingewiesen.

Definition 2.1

Sei $\mathfrak{H}$ ein Halbring über Ω. Die nummerische Funktion $\mu : \mathfrak{H} \to [0, +\infty]$ mit $\mu(\emptyset)=0$ heißt

a) *Inhalt*, wenn sie *additiv* ist, d.h. wenn für jede endliche Folge paarweise disjunkter Mengen $A_1, \dots, A_n$ mit $\biguplus_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{H}$ gilt:

$$\mu\Big(\biguplus_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

b) *Prämaß*, wenn sie *σ-additiv* ist, d.h. wenn für jede Folge paarweise disjunkter Mengen $A_1, A_2, \dots$ mit $\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{H}$ gilt:

$$\mu\Big(\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

c) *Maß*, wenn sie σ-additiv und $\mathfrak{H}$ sogar eine σ-Algebra ist. ❐

Bemerkung 2.2

i) Ist $\mathfrak{H}$ in Definition 2.1 ein Ring, so ist $\mathfrak{H}$ vereinigungsstabil und es genügt in Teil a) der Definition $\mu(A \uplus B) = \mu(A) + \mu(B)$ für alle disjunkten $A, B \in \mathfrak{H}$ zu fordern.

ii) Offensichtlich ist jedes Maß ein Prämaß und jedes Prämaß ein Inhalt.

iii) Ist μ ein Maß auf der σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in Ω, so wird das Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ auch als *Maßraum* bezeichnet. Ein Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ mit $\mu(\Omega) = 1$ wird als *Wahrscheinlichkeitsraum* und μ als *Wahrscheinlichkeitsmaß* bezeichnet. ❐

Beispiel 2.3

i) Sei Ω eine beliebige Menge und $\mathfrak{A} := \wp(\Omega)$. Für $E \in \mathfrak{A}$, d.h. $E \subset \Omega$ definieren wir

$$\zeta(E) := |E|,$$

wobei $|E|$ die Anzahl der Elemente von E angibt, mit der Konvention $|E| = \infty$, falls E unendlich viele Elemente enthält. ζ ist ein Maß und wird als *Zählmaß* bezeichnet.

ii) Durch $\lambda\big([a, b[\big) := b - a$ wird auf dem Halbring $\mathfrak{J}^1$ ein Inhalt definiert, der als *eindimensionaler Elementarinhalt* bezeichnet wird. In Abschnitt 2.2, Satz 2.13 werden wir zeigen, dass λ sogar ein Prämaß ist.

iii) Sei $\mathfrak{H}$ ein beliebiger Halbring über Ω und $\omega \in \Omega$ ein festes Element. Definiert man

$$\epsilon_\omega(A) := \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases},$$

so gilt offensichtlich $\epsilon_\omega(\emptyset) = 0$ und $\epsilon_\omega \geqslant 0$.
Ist $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ eine paarweise disjunkte Folge in $\mathfrak{H}$ mit $\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{H}$, so gilt:

$$\begin{aligned} \omega \in \dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists! i \in \mathbb{N} : \omega \in A_i \\ \omega \notin \dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall i \in \mathbb{N} : \omega \notin A_i \end{aligned}$$

Im ersten Fall gilt

$$\epsilon_\omega\Big(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_\omega(A_i) = 1,$$

im zweiten Fall dagegen erhält man

$$\epsilon_\omega\Big(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_\omega(A_i) = 0.$$

ϵ_ω ist also ein Prämaß auf $\mathfrak{H}$ und heißt die in ω konzentrierte *Einheitsmasse*[1]. Ist $\mathfrak{H}$ sogar eine σ-Algebra, liefert ϵ_ω ein Maß. Man nennt es auch das *Dirac-Maß*.

[1]Diese Bezeichnung leitet sich von der Vorstellung ab, ein Maß μ als Massenverteilung auf Ω zu interpretieren. $\mu(A)$ gibt dann an, welchen Masseanteil die Menge A trägt.

iv) Sei Ω eine überabzählbare Menge und $\mathfrak{A} = \{A \subset \Omega \mid A \text{ abzählbar } \vee \complement A \text{ abzählbar}\}$ die in Beispiel 1.3 iv) definierte σ-Algebra. Definiert man für $A \in \mathfrak{A}$

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ abzählbar} \\ 1 & \text{falls } \complement A \text{ abzählbar,} \end{cases}$$

so ist μ ein Maß auf $\mathfrak{A}$. Hierfür ist offensichtlich nur die σ-Additivität von μ nachzuweisen. Sei hierzu $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Folge paarweise disjunkter Elemente von $\mathfrak{A}$.

1. Fall: Alle A_i sind abzählbar. Dann ist auch $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ abzählbar und es gilt daher

$$0 = \mu\Big(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

2. Fall: Mindestens eine der Mengen, o.E. A_1, ist nicht abzählbar, d.h. nach Definition von $\mathfrak{A}$ ist $\complement A_1$ abzählbar. Aufgrund der paarweisen Disjunktheit gilt dann $A_1 \cap A_i = \emptyset$ bzw. äquivalent[2] $A_i \subset \complement A_1$ für $i \geqslant 2$. Daher sind die Mengen $A_2, A_3, \ldots$ abzählbar und es gilt:

$$\mu\Big(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i\Big) = 1 = \mu(A_1) + 0 = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

v) Sei Ω abzählbar unendlich und $\mathfrak{A} = \{A \subset \Omega \mid A \text{ endlich } \vee \complement A \text{ endlich}\}$. $\mathfrak{A}$ ist gemäß Beispiel 1.3 iii) eine Algebra. Definiert man für $A \in \mathfrak{A}$:

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ endlich} \\ 1 \text{ (bzw. } +\infty) & \text{falls } \complement A \text{ endlich} \end{cases}$$

so ist μ ein Inhalt, aber kein Prämaß. Dies folgt aus

$$1 \text{ (bzw. } +\infty) = \mu(\Omega) = \mu\Big(\dot{\bigcup_{\omega \in \Omega}} \{\omega\}\Big) \neq \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\{\omega\}) = 0$$

❐

Wir wollen nun den ersten Schritt in dem zu Beginn von Kapitel 1 erwähnten Fortsetzungsprozess durchführen. Wir zeigen, dass sich jeder auf einem Halbring $\mathfrak{H}$ definierte Inhalt auf genau eine Weise auf den von $\mathfrak{H}$ erzeugten Ring $\boldsymbol{\rho}(\mathfrak{H})$ fortsetzen lässt.

Satz 2.4

Jeder Inhalt μ auf einem Halbring $\mathfrak{H}$ lässt sich auf genau eine Weise zu einem Inhalt auf $\boldsymbol{\rho}(\mathfrak{H})$ fortsetzen. Diese Fortsetzung ist genau dann ein Prämaß auf $\boldsymbol{\rho}(\mathfrak{H})$, wenn μ ein Prämaß auf $\mathfrak{H}$ ist. ❑

[2] Dies bedeutet insbesondere, dass es keine zwei disjunkten überabzählbaren Mengen unter den A_i gibt.

Beweis:
Für jedes $A \in \boldsymbol{\rho}(\mathfrak{H})$ gibt es disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_m \in \mathfrak{H}$ mit $A = \dot{\bigcup}_{i=1}^{m} A_i$. Falls μ eine Fortsetzung ν besitzt, muss

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) \tag{2.1}$$

gelten und es ist zunächst zu zeigen, dass ν durch Gleichung (2.1) wohldefiniert, d.h. unabhängig von der vorgegebenen Zerlegung von A ist. Sei hierzu $A = \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} B_k$ eine zweite disjunkte Zerlegung von A. Dann gilt

$$A_j = A_j \cap A = A_j \cap \dot{\bigcup_{k=1}^{n}} B_k = \dot{\bigcup_{k=1}^{n}} (A_j \cap B_k) \quad \text{für } j = 1, \ldots, m$$

und analog

$$B_k = \dot{\bigcup_{j=1}^{m}} (A_j \cap B_k) \quad \text{für } k = 1, \ldots, n$$

Da wegen der Durchschnittsstabilität von Halbringen die Mengen $A_j \cap B_k$ wieder in $\mathfrak{H}$ liegen und disjunkt sind, ergibt sich aus der endlichen Additivität von μ auf $\mathfrak{H}$

$$\mu(A_j) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_j \cap B_k) \tag{2.2}$$

$$\mu(B_k) = \sum_{j=1}^{m} \mu(A_j \cap B_k) \tag{2.3}$$

Die Summation von Gleichung (2.2) über j liefert

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} \mu(A_j) &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_j \cap B_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \mu(A_j \cap B_k)}_{\mu(B_k)} \\
&\overset{(2.3)}{=} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)
\end{aligned}$$

Zum Beweis der Inhaltseigenschaft von ν bleibt zu zeigen, dass für disjunkte $A, B \in \boldsymbol{\rho}(\mathfrak{H})$

$$\nu(A \,\dot{\cup}\, B) = \nu(A) + \nu(B)$$

gilt. Dies folgt jedoch direkt aus der gezeigten Zerlegungsunabhängigkeit von ν.
Es bleibt der Nachweis, dass μ genau dann σ-additiv ist, wenn ν σ-additiv ist. Da mit ν auch μ als Einschränkung σ-additiv sein muss, ist nur zu zeigen, dass aus der σ-Additivität von μ die σ-Additivität der Fortsetzung ν folgt.

Sei daher μ ein Prämaß auf $\mathfrak{H}$ und $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge disjunkter Mengen aus $\boldsymbol{\rho}(\mathfrak{H})$ mit $A := \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n \in \boldsymbol{\rho}(\mathfrak{H})$. Nach Satz 1.14 gibt es disjunkte Mengen $B_1, \ldots, B_m$ in $\mathfrak{H}$ mit

$$A = \biguplus_{j=1}^{m} B_j$$

und zu jeder Menge A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ gibt es disjunkte Mengen $C_{n,1}, \ldots, C_{n,\ell_n}$ in $\mathfrak{H}$ mit

$$A_n = \biguplus_{k=1}^{\ell_n} C_{n,k}$$

Wegen

$$B_j = B_j \cap A = \biguplus_{n=1}^{\infty} (B_j \cap A_n) = \biguplus_{n=1}^{\infty} \biguplus_{k=1}^{\ell_n} (B_j \cap C_{n,k})$$

ist B_j disjunkte Vereinigung von Mengen aus $\mathfrak{H}$. Aus der σ-Additivität von μ auf $\mathfrak{H}$ und der Definition von ν folgt daher

$$\mu(B_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\sum_{k=1}^{\ell_n} \mu(B_j \cap C_{n,k})}^{=\nu(B_j \cap A_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_j \cap A_n)\ .$$

Anschließende Summation über j liefert schließlich mit der endlichen Additivität von ν:

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \nu\Big(\biguplus_{j=1}^{m} B_j\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_j \cap A_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \nu(B_j \cap A_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \nu\Big(\biguplus_{j=1}^{m} (B_j \cap A_n)\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap A_n) \ = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)
\end{aligned}$$

■

Beispiel 2.5

Betrachtet man den Elementarinhalt λ auf dem Halbring $\mathfrak{J}^1$ der 1-dimensionalen rechtsoffenen Intervalle in $\mathbb{R}$ aus Beispiel 2.3 ii), so wird durch

$$\nu\Big([a,b[\ \uplus\ [c,d[\Big) := \lambda\Big([a,b[\Big) + \lambda\Big([c,d[\Big) = b-a+d-c$$

ein Inhalt auf $\mathfrak{F}^1$ definiert, den wir wegen der Eindeutigkeit wieder mit λ bezeichnen. ❐

Wegen Satz 2.4 können wir in Zukunft bei der Untersuchung von Inhalten immer davon ausgehen, dass sie auf Ringen definiert sind. Zur Konstruktion von Inhalten, Prämaßen und Maßen ist es natürlich bequemer, von Halbringen als Definitionsbereich auszugehen. Ein Beispiel hierfür ist die Konstruktion des Lebesgue-Maßes, das wir sukzessive aus dem Elementarinhalt λ gewinnen. Um auch das mehrdimensionale Lebesgue-Maß konstruieren zu können, führen wir das sog. *Produktmaß* ein. Es verallgemeinert den Übergang des eindimensionalen Längen- zum mehrdimensionalen Flächen- bzw. Volumenbegriff. Die Idee besteht darin, analog zur Elementargeometrie durch Produktbildung einen Inhalt auf dem Kreuzprodukt von Halbringen zu konstruieren. Speziell angewendet auf das eindimensionale Lebesgue-Maß liefert er das mehrdimensionale Lebesgue-Maß auf dem Ring der Figuren $\mathfrak{F}^n$ (siehe Beispiel 1.16).

Satz 2.6

Für $i = 1, \ldots, n$ seien $\mu_i : \mathfrak{H}_i \to \mathbb{R}^\star$ Inhalte. Dabei bezeichnen $\mathfrak{H}_i$ Halbringe über den Mengen Ω_i. Dann wird auf dem Halbring $\mathfrak{H}_1 * \mathfrak{H}_2 * \cdots * \mathfrak{H}_n$ durch

$$\begin{aligned} \mu : \mathfrak{H}_1 * \mathfrak{H}_2 * \cdots * \mathfrak{H}_n &\to \mathbb{R}^\star \\ H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n &\mapsto \mu(H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n) := \mu_1(H_1) \cdot \mu_2(H_2) \cdots \mu_n(H_n) \end{aligned}$$

ein Inhalt definiert, den wir mit $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ bezeichnen. ❑

Beweis:

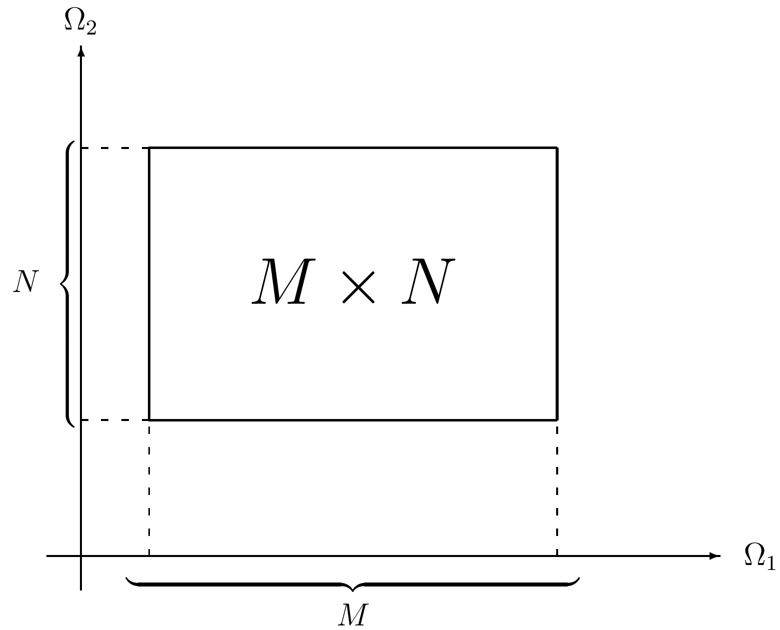
Der Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion nach n, kann jedoch wegen

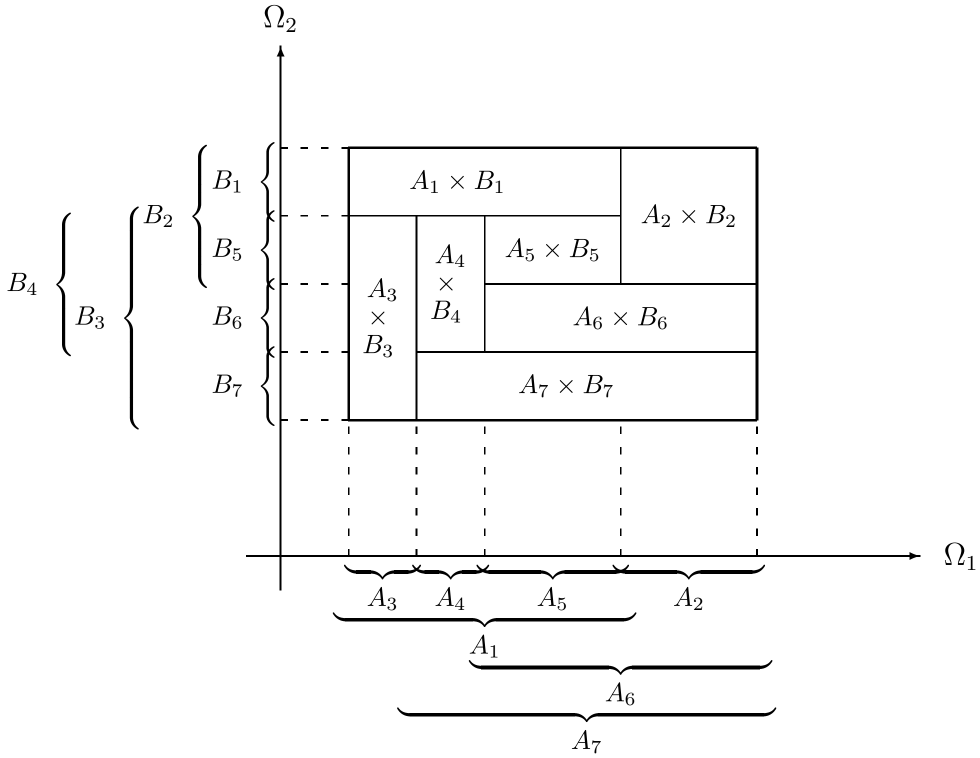
$$H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \times H_{n+1} = \Big(H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n\Big) \times H_{n+1}$$

auf den Fall n=2 reduziert werden. Wir definieren $\mu := \mu_1 \otimes \mu_2$. Wegen der offensichtlichen Beziehung $\mu(\emptyset \times \emptyset) = \mu(\emptyset) \cdot \mu(\emptyset) = 0$ bleibt nur die Additivität von μ zu zeigen. Seien daher $A_1 \times B_1, A_2 \times B_2, \ldots, A_m \times B_m$ disjunkte Mengen in $\mathfrak{H}_1 * \mathfrak{H}_2$ mit

$$\dot{\bigcup_{i=1}^{m}} (A_i \times B_i) = M \times N \in \mathfrak{H}_1 * \mathfrak{H}_2 \ . \tag{2.4}$$

Insbesondere gilt $\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i = M$ und $\bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i = N$ wegen Gleichung (2.4). Die nachfolgenden Skizzen stellen diese Situation für den Fall $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{I}$ und m=7 dar.

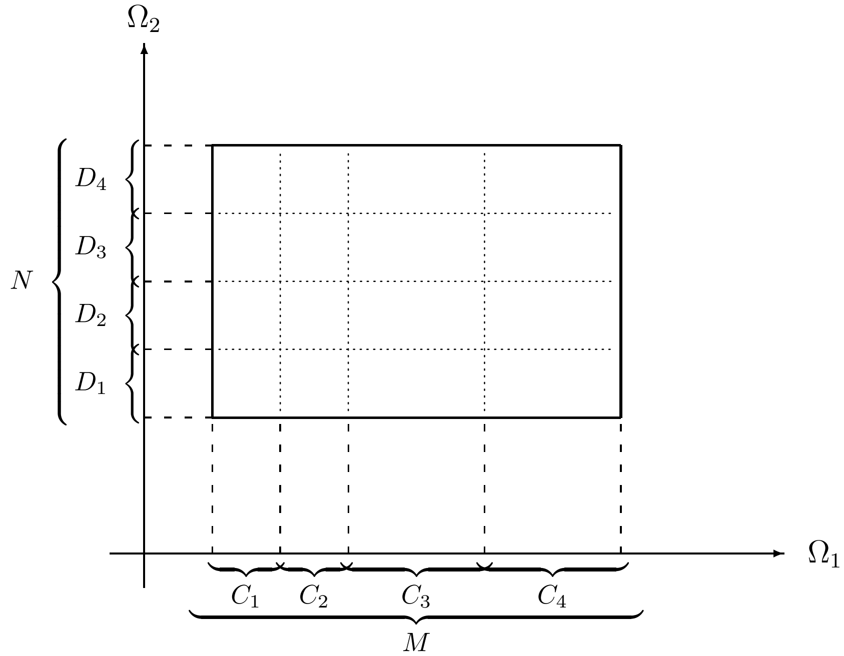




Nach Lemma 1.14 b) existieren zu den Mengen $A_1, \ldots, A_m \in \mathfrak{H}_1$ disjunkte Mengen $C_1, \ldots, C_s \in \mathfrak{H}_1$, so dass sich jede Menge A_i als Vereinigung bestimmter Mengen C_j darstellen lässt. Analog existieren zu den Mengen $B_1, \ldots, B_m \in \mathfrak{H}_1$ disjunkte Mengen $D_1, \ldots, D_t \in \mathfrak{H}_2$, so dass jede Menge B_i sich als Vereinigung bestimmter Mengen D_j darstellen lässt. Insbesondere folgt

$$\dot{\bigcup_{i=1}^{s}} C_i = M \qquad \text{und} \qquad \dot{\bigcup_{i=1}^{t}} D_j = N \ .$$

Die folgende Skizze zeigt eine mögliche resultierende Zerlegung der Menge $M \times N$, die sich aus der vorigen Zeichnung ablesen lässt.



Zu jedem k existieren (wieder nach Lemma 1.14) eindeutig bestimmte Mengen $\mathbb{S}_k \subset \mathbb{S} := \{1, \ldots, s\}$ und $\mathbb{T}_k \subset \mathbb{T} := \{1, \ldots, t\}$ mit

$$A_k = \dot{\bigcup_{i \in \mathbb{S}_k}} C_i \qquad \text{und} \qquad B_k = \dot{\bigcup_{j \in \mathbb{T}_k}} D_j \ .$$

In der zweiten Skizze gilt z.B. $A_2 \times B_2 = C_4 \times (D_3 \dot\cup D_4)$, d.h. $\mathbb{S}_2 = \{4\}, \mathbb{T}_2 = \{3, 4\}$. Die Mengen $\mathbb{S}_k \times \mathbb{T}_k$ sind disjunkt (nicht die $\mathbb{S}_k$ bzw. $\mathbb{T}_k$!!), da die Mengen $A_k \times B_k$ disjunkt sind und wegen Gleichung (2.4) gilt

$$\dot{\bigcup_{k=1}^{m}} (\mathbb{S}_k \times \mathbb{T}_k) = \mathbb{S} \times \mathbb{T}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mu(M \times N) &= \mu_1(M) \cdot \mu_2(N) = \mu_1\Big(\dot{\bigcup_{i=1}^{s}} C_i\Big) \cdot \mu_2\Big(\dot{\bigcup_{j=1}^{t}} D_j\Big) \\
&\overset{\mu_i \text{ additiv}}{=} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} \mu_1(C_i)\mu_2(D_j) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}} \mu_1(C_i)\mu_2(D_j) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \sum_{(i,j) \in \mathbb{S}_k \times \mathbb{T}_k} \mu_1(C_i)\mu_2(D_j) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i \in \mathbb{S}_k} \sum_{j \in \mathbb{T}_k} \mu_1(C_i)\mu_2(D_j) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\sum_{i \in \mathbb{S}_k} \mu_1(C_i)}_{\mu_1(A_k)} \underbrace{\sum_{j \in \mathbb{T}_k} \mu_2(D_j)}_{\mu_2(B_k)} \\
&\overset{\mu_i \text{ additiv}}{=} \sum_{k=1}^{m} \mu_1(A_k)\mu_2(B_k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mu(A_k \times B_k) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Beispiel 2.7
Setzt man für $i = 1, \ldots, n$ in Satz 2.6 speziell $\mathfrak{H}_i$ gleich dem Halbring $\mathfrak{J}$ der nach rechts offenen 1-dimensionalen Intervalle und μ_i gleich dem 1-dimensionalen Elementarinhalt λ, so wird durch

$$\lambda^n := \lambda \otimes \lambda \otimes \cdots \otimes \lambda$$

ein Inhalt auf dem Halbring $\mathfrak{J}^n$ aller n-dimensionalen nach rechts offenen Intervalle definiert. Sind $\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $\boldsymbol{b} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ zwei Punkte des $\mathbb{R}^n$, so gilt

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[= [\alpha_1, \beta_1[\times [\alpha_2, \beta_2[\times \cdots \times [\alpha_n, \beta_n[$$

und daher

$$\begin{aligned} \lambda^n\Big([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[\Big) &= \lambda([\alpha_1, \beta_1[) \cdot \lambda([\alpha_2, \beta_2[) \cdots \lambda([\alpha_n, \beta_n[) \\ &= (\beta_1 - \alpha_1) \cdot (\beta_2 - \alpha_2) \cdots (\beta_n - \alpha_n) \end{aligned}$$

Dieser Inhalt lässt sich mit Satz 2.4 eindeutig auf den Ring der Figuren $\mathfrak{F}^n$ fortsetzen. $\lambda^n\Big([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[\Big)$ wird *n-dimensionaler Elementarinhalt* des Intervalls $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ genannt. In Satz 2.13 werden wir zeigen, dass $\lambda^n : \mathfrak{F}^n \to \mathbb{R}^\star$ sogar ein Prämaß ist. ❒

Folgerung 2.8
Ein Inhalt μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ hat folgende Eigenschaften

1) $A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B)$ (*Isotonie*)

2) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

3) $A \subset B \Longrightarrow \mu(A) + \mu(B \backslash A) = \mu(B)$ (*Subtraktivität*[3])

4) $\mu\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\Big) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$ für $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{R}$ beliebig (*Subadditivität*)

5) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leqslant \mu\Big(\dot{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}} A_i\Big)$, sofern $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkte Mengen aus $\mathfrak{R}$ sind, für die $\dot{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}} A_i$ in $\mathfrak{R}$ liegt. (σ-*Superadditivität*) ❒

Beweis:

1) Für $A \subset B$ gilt $B = A \dot{\cup} (B \backslash A)$ und aus der Additivität folgt

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \overset{\mu(B\backslash A) \geqslant 0}{\geqslant} \mu(A).$$

[3]Die Bezeichnung Subtraktivität ist darauf zurückzuführen, dass im Fall $\mu(A) < \infty$ die Gleichung in der Form $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$ geschrieben werden kann.

2) Für beliebige Mengen $A, B \in \mathfrak{R}$ gelten die disjunkten Darstellungen

$$A \cup B = A \ \dot{\cup} \ (B \backslash A) \quad \text{und} \quad (A \cap B) \ \dot{\cup} \ (B \backslash A) = B.$$

Aufgrund der Additivität von μ für endliche disjunkte Vereinigungen folgt:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \tag{2.5}$$

$$\mu(A \cap B) + \mu(B \backslash A) = \mu(B) \tag{2.6}$$

O.E. können wir $\mu(A) < \infty$ und $\mu(B) < \infty$ annehmen, da andernfalls die Behauptung trivialerweise erfüllt ist. Nach Teil 1) gilt daher auch $\mu(B \backslash A) < \infty$ und die Addition der Gleichungen (2.6) und (2.5) liefert

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \backslash A) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(B \backslash A).$$

Subtraktion von $\mu(B \backslash A)$ liefert dann die Behauptung.

3) Für $A \subset B$ gilt $A \cup B = B$ und Gleichung (2.5) aus dem Beweis von 2) liefert

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A).$$

4) Zu gegebenen Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ definieren wir $B_1 := A_1$ und $B_k := A_k \backslash \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$ für $k = 2, \ldots, n$. Die Mengen B_i sind paarweise disjunkt, erfüllen $B_i \subset A_i$ und es gilt $\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Daher folgt

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \mu\Big(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} B_i\Big) \overset{\mu\,\text{additiv}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) \overset{\mu\,\text{isoton}}{\leqslant} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

5) Sei $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{R}$ mit $\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{R}$. Wegen $\dot{\bigcup}_{i=1}^{m} A_i \subset \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i$ folgt aufgrund der paarweisen Disjunktheit und der Isotonie von μ:

$$\sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) \overset{\text{Disj.}}{=} \mu\Big(\dot{\bigcup_{i=1}^{m}} A_i\Big) \overset{\text{Isot.}}{\leqslant} \mu\Big(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i\Big)$$

Grenzwertbildung $m \to \infty$ liefert die Behauptung

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leqslant \mu\Big(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i\Big)$$

■

Folgerung 2.9

Ist μ ein Prämaß auf $\mathfrak{R}$, kann Aussage 4) des letzten Satzes verschärft werden zu

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

falls $A_1, A_2, \dots$ beliebige Mengen sind, für die $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ in $\mathfrak{R}$ liegt. Dies ergibt sich, wenn man in folgender Aussage $A_0 := \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ setzt:
Ist μ ein Prämaß auf $\mathfrak{R}$ und sind $A_0, A_1, A_2, \dots$ beliebige Mengen aus $\mathfrak{R}$, so gilt:

$$A_0 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Longrightarrow \mu(A_0) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

❐

Beweis:

Definiert man $\tilde{A}_i{:=}A_0{\cap}A_i$ und $B_1{:=}\tilde{A}_1$, $B_k{:=}\tilde{A}_k \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} \tilde{A}_i$, so folgt aufgrund der Disjunktheit der Mengen B_k und wegen $\dot{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}} B_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i$:

$$\begin{aligned}
\mu(A_0) \;=\; \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_0 \cap A_i\Big) &= \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i\Big) \\
&= \mu\Big(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} B_i\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\tilde{A}_i) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)
\end{aligned}$$

■

Verallgemeinert man den Konvergenzbegriff auf Folgen von Mengen, besteht die Möglichkeit bei Maßen den Begriff der Stetigkeit einzuführen (siehe nachfolgenden Satz 2.11). Die folgende Konvergenzdefinition findet sich (inklusive weiterer Eigenschaften) auch im Anhang und wird dort intensiver diskutiert und erläutert.

Definition 2.10

Sei $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Folge in der Potenzmenge $\wp(\Omega)$.

a) Die Folge $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ heißt

- *isoton (monoton wachsend)*, wenn $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$
- *antiton (monoton fallend)*, wenn $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ gilt.

b) Man definiert

$$\liminf_{i\to\infty} A_i := \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{k=i}^{\infty} A_k \qquad \text{und} \qquad \limsup_{i\to\infty} A_i := \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=i}^{\infty} A_k$$

c) Die Folge $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ heißt *konvergent gegen* $A \subset \Omega$ und man schreibt $\lim\limits_{i\to\infty} A_i = A$, wenn gilt

$$\limsup_{i\to\infty} A_i = A = \liminf_{i\to\infty} A_i$$ ❐

Satz 2.11

Für einen Inhalt μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ über Ω betrachte man die Eigenschaften

i) μ ist ein Prämaß, d.h. μ ist σ-additiv

ii) Für jede isotone Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathfrak{R}$ mit $A_n \uparrow A \in \mathfrak{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\Big(\lim_{n\to\infty} A_n\Big) = \mu(A) \quad (\textit{Stetigkeit von unten})$$

iii) Für jede antitone Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathfrak{R}$ mit $A_n \downarrow A \in \mathfrak{R}$ und $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\Big(\lim_{n\to\infty} A_n\Big) = \mu(A) \quad (\textit{Stetigkeit von oben})$$

iv) Für jede antitone Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathfrak{R}$ mit $A_n \downarrow \emptyset$ und $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\Big(\lim_{n\to\infty} A_n\Big) = \mu(\emptyset) = 0 \quad (\textit{Nullstetigkeit})$$

a) Es gelten die Beziehungen: i) $\iff$ ii) $\implies$ iii) $\iff$ iv)

b) Ist μ endlich, d.h. ist $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathfrak{R}$, sind alle Eigenschaften äquivalent. ❑

Beweis:

a) i) $\Rightarrow$ ii): Sei $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ eine isotone Folge in $\mathfrak{R}$ mit $A := \lim\limits_{i\to\infty} A_i \in \mathfrak{R}$. Definiert man $B_1 := A_1$ und $B_i := A_i \setminus A_{i-1}$ für $i \geqslant 2$, so sind die B_i paarweise disjunkt und es gilt:

$$A_n = \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} B_i \quad \text{und} \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} B_i = \dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} B_i$$

Dies liefert:

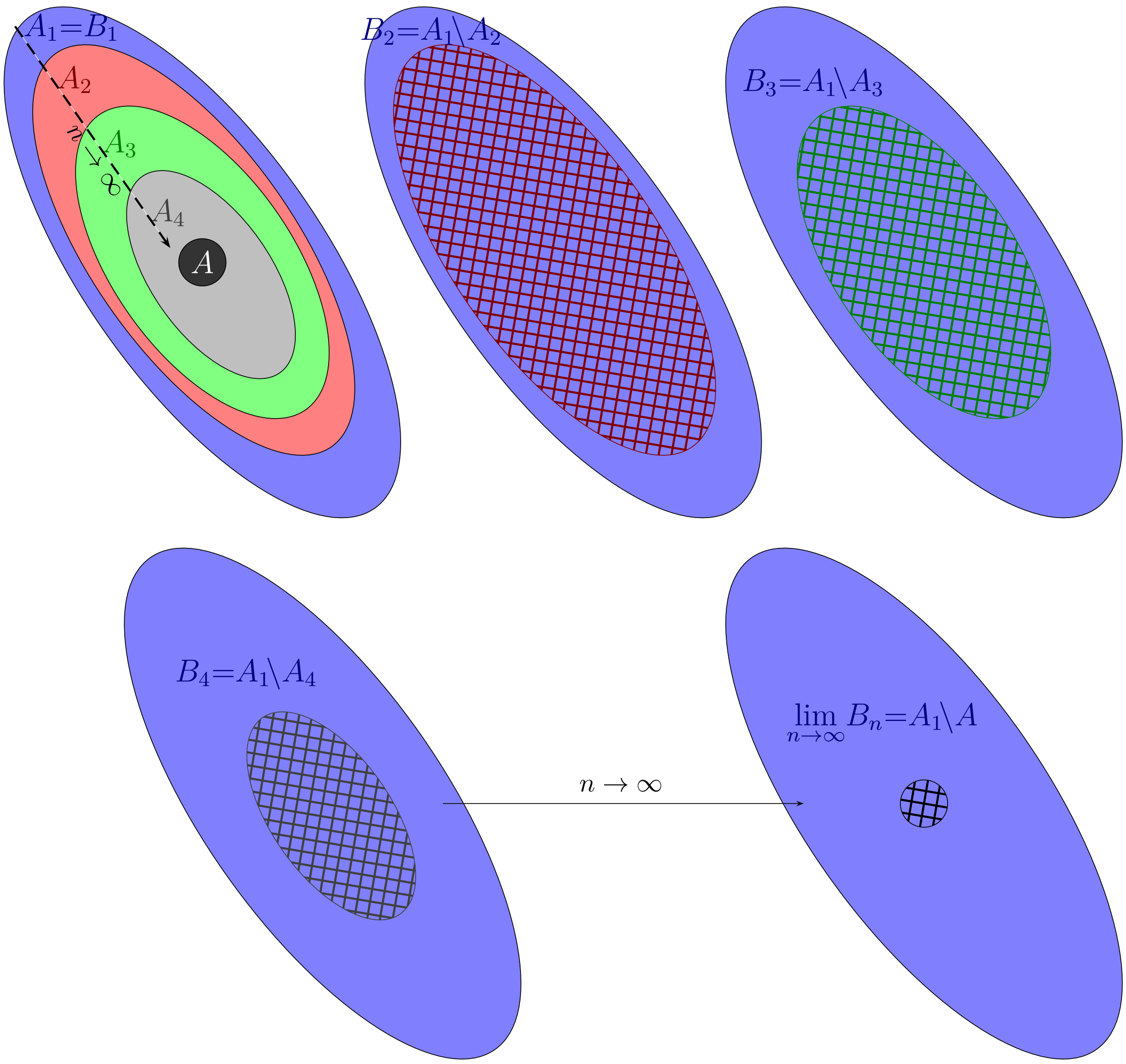
$$\mu(A) = \mu\Big(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} B_i\Big) \overset{\text{i)}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} B_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

ii) $\Rightarrow$ i): Sei $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{R}$ mit der Eigenschaft $A := \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{R}$. Definiert man $B_n := \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i$, so ist $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ eine isotone Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = A$. Damit folgt:

$$\mu\Big(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i\Big) = \mu(A) \overset{\text{ii)}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} A_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

ii) $\Rightarrow$ iii): Sei $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine antitone Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n =: A$ und $\mu(A_n)<\infty$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Definiert man $B_n := A_1 \setminus A_n$, so ist $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ eine isotone Folge mit

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus A$$



Also folgt:

$$\begin{aligned} \mu(A_1\setminus A) &= \mu(\lim_{n\to\infty} B_n) \overset{\text{ii)}}{=} \lim_{n\to\infty}\mu(B_n) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_1\setminus A_n) \\ &\overset{2.8\,(3)}{=} \lim_{n\to\infty}\Big[\mu(A_1)-\mu(A_n)\Big] = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty}\mu(A_n) \end{aligned}$$

Nach Folgerung 2.8 (3) gilt[4] $\mu(A_1\setminus A) = \mu(A_1) - \mu(A)$. Damit ergibt sich:

$$\mu(A_1) - \mu(A) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

[4] Beachte, dass $\mu(A)<\infty$ gilt, wegen $A\subset A_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Subtraktion von $\mu(A_1)$ und Multiplikation mit -1 liefert die Behauptung.

iii) $\Rightarrow$ iv): trivial.

iv) $\Rightarrow$ iii): Sei $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine antitone Folge in $\mathfrak{R}$ mit $\mu(A_n)<\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$. Dann konvergiert die Folge $(A_n\backslash A)_{n=1}^{\infty}$ antiton gegen $\emptyset$. Wegen $A_n\backslash A \subset A_n$ ist aufgrund der Isotonie von μ mit $\mu(A_n)$ auch $\mu(A_n\backslash A)$ immer endlich. Nach Voraussetzung iv) folgt daher $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n\backslash A) = 0$. Da außerdem $\mu(A) \leqslant \mu(A_n) < \infty$ gilt, kann die Subtraktivitätsregel (Folgerung 2.8 (3)) angewendet werden. Dies liefert $\mu(A_n\backslash A) = \mu(A_n)-\mu(A)$ und daher:

$$0 = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n\backslash A) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n) - \mu(A) \iff \lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = \mu(A)$$

b) Es genügt offensichtlich, die Implikation iv) $\Longrightarrow$ ii) nachzuweisen. Sei hierzu $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine isotone Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} A_n =: A \in \mathfrak{R}$. Dann ist $(A\backslash A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine antitone Folge mit Grenzwert $\emptyset$ und nach Voraussetzung gilt daher:

$$0 = \lim_{n\to\infty}\mu(A\backslash A_n)$$

Wegen der Endlichkeit von μ folgt $\mu(A_n)<\infty$, so dass $\mu(A\backslash A_n) = \mu(A)-\mu(A_n)$ nach Folgerung 2.8 (3) gilt. Dies liefert

$$0 = \lim_{n\to\infty}\mu(A\backslash A_n) = \mu(A) - \lim_{n\to\infty}\mu(A_n) \iff \lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = \mu(A)$$

■

Bemerkung 2.12

i) Sei Ω abzählbar unendlich und $\mathfrak{R} := \{A\subset\Omega \mid A \text{ endlich} \vee \complement A \text{ endlich}\}$. Wir definieren μ auf $\mathfrak{R}$ durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty & \text{falls } \complement A \text{ endlich} \end{cases}$$

Wie in Beispiel 2.3 iv) gesehen, ist μ ein Inhalt, aber kein Prämaß auf $\mathfrak{R}$. μ ist nullstetig, d.h. erfüllt Eigenschaft iv) in Satz 2.11. Ist nämlich $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine antitone Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \emptyset$ und $\mu(A_n) < \infty$, so muss nach Definition von μ schon $\mu(A_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten, woraus sich sofort $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$ ergibt. Würde Eigenschaft ii) aus Eigenschaft iv) folgen, wäre μ ein Prämaß wegen der bewiesenen Äquivalenz ii) $\iff$ i), im Widerspruch zu Beispiel 2.3 iv). Ohne die Endlichkeitsbedingung sind also die Eigenschaften i) - iv) in Satz 2.11 nicht äquivalent.

ii) In Eigenschaft iii) von Satz 2.11 genügt die Forderung $\mu(A_n)<\infty$ für ein $n\in\mathbb{N}$, da dann aufgrund der Antitonie schon $\mu(A_m) \leqslant \mu(A_n) < \infty$ für alle $m \geqslant n$ folgt. ❐

2.2. Das Lebesguesche Prämaß

Bevor wir die Theorie weiter verfolgen, soll als nichttriviales Beispiel der Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$ mit dem n-dimensionalen Elementarinhalt λ^n betrachtet werden. Wir zeigen, dass λ^n ein Prämaß ist, welches wir später (siehe Folgerung 2.23) zum Lebesgue-Borelschen Maß fortsetzen. Gleichzeitig soll uns dieser konkrete Fall in Abschnitt 2.3 als „Muster“ für unsere Vorstellung bei der Übertragung auf beliebige Ω dienen.

Satz 2.13

Der Inhalt λ^n auf $\mathfrak{F}^n$ ist ein Prämaß, das auch als *n-dimensionales Lebesguesches Prämaß* bezeichnet wird. Ist n aus dem Kontext ersichtlich, bezeichnen wir es einfach mit λ. ❑

Beweis:

Da λ auf $\mathfrak{F}^n$ endlich ist, genügt es nach Satz 2.11 die Nullstetigkeit von λ nachzuweisen, d.h. es ist zu zeigen, dass für jede antitone Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ von Figuren, die gegen $\emptyset$ konvergiert, die Eigenschaft $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)=0$ erfüllt ist.
Der Beweis erfolgt indirekt. Sei hierzu $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ eine antitone Folge von Figuren in $\mathfrak{F}^n$ mit

$$(*) \quad \lim_{k\to\infty}\lambda(A_k) = \inf_{k\in\mathbb{N}}\lambda(A_k) =: \delta > 0 \ .$$

Dann ist zu zeigen, dass $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset$ gilt.
Da jede Figur A_k Vereinigung endlich vieler paarweise disjunkter Intervalle $I_1, \ldots, I_m \in \mathfrak{J}^n$ ist, kann durch entsprechendes Verkleinern dieser Intervalle eine Figur $F_k \in \mathfrak{F}^n$ gewonnen werden, mit $\overline{F}_k \subset A_k$ und

$$\lambda(A_k) - \lambda(F_k) \ \leqslant \ \delta \cdot 2^{-k} \ .$$

Definiert man $B_k := \bigcap\limits_{j=1}^{k} F_j$, so ist $(B_k)_{k=1}^{\infty}$ offenbar eine antitone Folge von Mengen, deren topologischer Abschluss die Eigenschaft $\overline{B}_k \subset \overline{F}_k \subset A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ besitzt.
Wir zeigen nun noch, dass die Mengen B_k nichtleer sind, indem wir mittels vollständiger Induktion folgende Ungleichung für alle $k \in \mathbb{N}$ nachweisen:

$$\lambda(B_k) \geqslant \lambda(A_k) - \delta\cdot(1-2^{-k}) = \lambda(A_k) - \delta + \delta\cdot 2^{-k} > 0. \tag{2.7}$$

Nach Definition $(*)$ von δ folgt nämlich $\lambda(A_k)-\delta\geqslant 0$, woraus sich $\lambda(B_k)>0$, also $B_k\neq\emptyset$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ergibt.
Für $k=1$ ist die Behauptung richtig, denn es gilt $B_1 = F_1$ und wegen $2^{-1} = 1-2^{-1}$ folgt

$$\lambda(A_1) - \lambda(F_1) \leqslant \delta\cdot 2^{-1} = \delta\cdot(1-2^{-1}) \iff \lambda(B_1) = \lambda(F_1) \geqslant \lambda(A_1) - \delta\cdot(1-2^{-1}) \ .$$

Gelte nun die Behauptung für ein $k\in\mathbb{N}$. Dann ergibt sich mit Folgerung 2.8 (2)

$$\lambda(B_{k+1}) = \lambda(F_{k+1}\cap B_k) = \lambda(F_{k+1}) + \lambda(B_k) - \lambda(F_{k+1}\cup B_k)$$

Einsetzen der Induktionsvoraussetzung liefert

$$\lambda(B_{k+1}) \;\geqslant\; \lambda(F_{k+1}) + \lambda(A_k) - \delta\cdot(1-2^{-k}) - \lambda(F_{k+1}\cup B_k)$$

Da nach Wahl von F_{k+1} die Ungleichung $\lambda(F_{k+1}) \geqslant \lambda(A_{k+1}) - \delta\cdot 2^{-(k+1)}$ gilt, folgt weiter

$$\begin{aligned}\lambda(B_{k+1}) \;&\geqslant\; \lambda(A_{k+1})-\delta\cdot 2^{-(k+1)} + \lambda(A_k) - \delta\cdot(1-2^{-k}) - \lambda(F_{k+1}\cup B_k)\\ &=\; \lambda(A_{k+1}) - \delta\cdot\Big(1-2^{-(k+1)}\Big) + \lambda(A_k) - \lambda(F_{k+1}\cup B_k)\end{aligned}$$

Beachtet man nun noch, dass

$$F_{k+1}\cup B_k \subset A_{k+1}\cup A_k = A_k$$

und somit $\lambda(F_{k+1}\cup B_k) \leqslant \lambda(A_k)$ gilt, folgt die Behauptung für $k{+}1$.
Wegen der Kompaktheit der $\overline{B}_k$ gilt nun nach Satz D.12 des Anhangs

$$\emptyset \neq \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B}_k \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

■

2.3. Fortsetzung von Prämaßen

In der Praxis erfolgt die Messung einer Größe mit Hilfe einer Maßeinheit und eines Messverfahrens. „Besonders einfachen" Mengen schreibt die Maßeinheit einen Inhalt zu. So kann z.B. bei der Berechnung des Flächeninhaltes von ebenen Mengen ein Quadratzentimeter als Maßeinheit verwendet werden. Eine mögliche Messmethode zur Flächenberechnung komplizierterer Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ (Elemente einer σ-Algebra!) besteht dann darin, diese Menge durch ein Netz quadratischer oder rechteckiger Maschen (Figuren) zu überdecken. Diese elementargeometrisch inspirierte „Erweiterungskonstruktion" vom Prämaß zum Maß lässt sich nicht nur für das Lebesguesche, sondern für alle Prämaße μ auf einer beliebigen Menge Ω durchführen. Dies rechtfertigt im Nachhinein auch die Bezeichnung Prämaß. Die Vorgehensweise erfolgt in 2 Schritten.

- Im ersten Schritt dehnen wir das Prämaß μ vom Ring $\mathfrak{R}$ zu einer Funktion $\mu^\star$ auf ganz $\wp(\Omega)$ aus. Aufgrund der Konstruktion nennt[5] man $\mu^\star$ ein „äußeres Maß".

- Im zweiten Schritt wird $\mu^\star$ auf die von $\mathfrak{R}$ erzeugte σ-Algebra $\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{R})$ eingeschränkt und gezeigt, dass diese Einschränkung ein Maß ist, das auf $\mathfrak{R}$ mit μ übereinstimmt.

Aufgrund der besseren Übersichtlichkeit ziehen wir den zweiten Schritt (Satz 2.16) vor, indem wir zunächst den Begriff des äußeren Maßes definieren und zeigen, wie daraus ein Maß im Sinne von Definition 2.1 konstruiert werden kann.

[5] Trotz dieses Namens ist $\mu^\star$ i.a. kein Maß im Sinne von Definition 2.1.

Definition 2.14

a) Ist $\Omega \neq \emptyset$, so heißt eine numerische Funktion $\eta : \wp(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^\star$ ein *äußeres Maß* auf Ω, wenn sie folgende Eigenschaften[6] besitzt:

   i) $\eta(\emptyset) = 0$

   ii) η ist isoton, d.h. $Q_1 \subset Q_2 \Longrightarrow \eta(Q_1) \leqslant \eta(Q_2)$.

   iii) Für jede Folge $(Q_k)_{k=1}^\infty$ in $\wp(\Omega)$ gilt $\eta\Big(\bigcup\limits_{k=1}^\infty Q_k\Big) \leqslant \sum\limits_{k=1}^\infty \eta(Q_k)$.

b) Ist η ein äußeres Maß auf Ω, so heißt eine Menge $A{\subset}\Omega$ *η-messbar*, wenn gilt

$$\forall Q{\in}\wp(\Omega) : \eta(Q{\cap}A) + \eta(Q{\cap}\complement A) \leqslant \eta(Q)$$

$\mathfrak{A}^\eta$ bezeichne die Menge aller η-messbaren Teilmengen von Ω. ❐

Bemerkung 2.15

Ist $A \in \mathfrak{A}^\eta$ eine η-messbare Menge und betrachtet man in $\wp(\Omega)$ für beliebiges $Q{\subset}\Omega$ die Folge $Q{\cap}A, Q{\cap}\complement A, \emptyset, \emptyset, \ldots$, so folgt aus der Subadditivitätseigenschaft iii) eines äußeren Maßes:

$$\eta(Q) = \eta\Big((Q{\cap}A) \cup (Q{\cap}\complement A)\Big) \leqslant \eta(Q{\cap}A) + \eta(Q{\cap}\complement A).$$

Daher ist A genau dann η-messbar, wenn für alle $Q \in \wp(\Omega)$ gilt

$$\eta(Q) = \eta(Q{\cap}A) + \eta(Q{\cap}\complement A). \tag{2.8}$$

Gleichung (2.8) besagt, dass A genau dann η-messbar ist, wenn für alle Mengen M_1, M_2, die sich durch A disjunkt trennen lassen, für die also $M_1{\subset}A$ und $M_2{\subset}\complement A$ gilt, die Additivitätseigenschaft $\eta(M_1 \,\dot\cup\, M_2) = \eta(M_1) + \eta(M_2)$ erfüllt ist. Speziell für $M_1 = Q{\cap}A$ und $M_2 = Q{\cap}\complement A$ erhält man Gleichung (2.8). ❐

Das äußere Maß η stellt eine für alle Teilmengen von Ω erklärte numerische Funktion und eine monotone subadditive Erweiterung von μ dar, die i.a. *nicht* additiv also auch nicht σ-additiv ist. Das äußere Maß η ist also kein Maß im Sinne unserer Definition. Deshalb schränkt man η auf das Mengensystem $\mathfrak{A}^\eta$ ein, auf dem η noch σ-additiv ist. Man sortiert mit anderen Worten alle die Mengen aus, die die Nichtadditivität von η hervorrufen.

Satz 2.16

Sei η ein äußeres Maß auf einer Menge Ω. Dann ist das System $\mathfrak{A}^\eta$ aller η-messbaren Mengen $A{\subset}\Omega$ eine σ-Algebra über Ω. Zudem ist die Restriktion von η auf $\mathfrak{A}^\eta$ ein Maß. ❐

[6] Die Bezeichnung äußeres Maß kann erst durch Satz 2.17, wo eine explizite Konstruktion eines äußeren Maßes erfolgt, begründet werden.

Beweis:
Wir zeigen zunächst, dass $\mathfrak{A}^\eta$ ein vereinigungsstabiles Dynkin-System und damit nach Satz 1.20 und Bemerkung 1.21 eine σ-Algebra ist.

i) Für alle $Q \in \wp(\Omega)$ gilt:

$$\eta(Q) = \eta(Q\cap\Omega) + \eta(\emptyset) = \eta(Q\cap\Omega) + \eta(Q\cap\complement\Omega)$$

Damit ist Ω nach Bemerkung 2.15 eine η-messbare Menge, d.h. $\Omega \in \mathfrak{A}^\eta$.

ii) Sei $A \in \mathfrak{A}^\eta$ beliebig. Dann gilt für alle $Q \in \wp(\Omega)$:

$$\eta(Q) = \eta(Q\cap A) + \eta(Q\cap\complement A) = \eta(Q\cap\complement\complement A) + \eta(Q\cap\complement A).$$

Daher ist auch $\complement A$ η-messbar.

iii) Wir zeigen, dass $\mathfrak{A}^\eta$ vereinigungsstabil ist, d.h. mit $A, B\in\mathfrak{A}^\eta$ liegt auch $A\cup B$ in $\mathfrak{A}^\eta$.

Zweimalige Anwendung der Definition der η-Messbarkeit von A und B für beliebiges $Q \in \wp(\Omega)$ liefert:

$$\begin{aligned}\eta(Q) &= \eta(Q\cap A) + \eta(Q\cap\complement A)\\ &= \eta(Q\cap A\cap B) + \eta(Q\cap A\cap\complement B)\\ &\quad + \eta(Q\cap\complement A\cap B) + \eta(Q\cap\complement A\cap\complement B)\end{aligned} \tag{2.9}$$

Ersetzt man in (2.9) nun Q durch $Q \cap (A\cup B)$, so folgt:

$$\begin{aligned}\eta(Q \cap (A\cup B)) &= \eta(Q\cap A\cap B) + \eta(Q\cap A\cap\complement B)\\ &\quad + \eta(Q\cap\complement A\cap B) + \eta(\emptyset)\end{aligned} \tag{2.10}$$

Setzt man die rechte Seite von Gleichung (2.10) in Gleichung (2.9) ein, folgt

$$\begin{aligned}\eta(Q) &= \eta(Q \cap (A\cup B)) + \eta(Q \cap \complement A\cap\complement B)\\ &= \eta(Q \cap (A\cup B)) + \eta(Q \cap \complement(A\cup B))\end{aligned}$$

Also ist auch $A \cup B$ eine η-messbare Menge.

iv) Wendet man Gleichung (2.10) auf zwei disjunkte Mengen $A, B \in \mathfrak{A}^\eta$ an, folgt wegen $A\cap B = \emptyset$, $A\cap\complement B = A$ und $\complement A\cap B = B$:

$$\eta(Q \cap (A\,\dot\cup\, B)) = \eta(Q\cap A) + \eta(Q\cap B)$$

für paarweise disjunkte Mengen $A_i \in \mathfrak{A}^\eta$ folgt daher mittels vollständiger Induktion:

$$\eta\Big(Q \cap \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \eta(Q\cap A_i)$$

Definiert man $A := \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i$, so gilt $Q \setminus \dot{\bigcup}_{i=1}^{m} A_i \supset Q \setminus A$ für jedes $Q \in \wp(\Omega)$. Aufgrund der Isotonie von η und der vorher bewiesenen endlichen Additivität von η folgt:

$$\begin{aligned} \eta(Q) &= \eta\Big(Q \cap \dot{\bigcup}_{i=1}^{m} A_i\Big) + \eta\Big(Q \setminus \dot{\bigcup}_{i=1}^{m} A_i\Big) \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{m} \eta(Q \cap A_i) + \eta(Q \setminus A) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Da gemäß Definition 2.14 a) iii) für äußere Maße die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta(Q \cap A_i) \geqslant \eta\Big(Q \cap \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \eta(Q \cap A)$$

gilt, liefert die Grenzwertbildung $m \longrightarrow \infty$ in Ungleichung (2.11):

$$\eta(Q) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \eta(Q \cap A_i) + \eta(Q \setminus A) \geqslant \eta(Q \cap A) + \eta(Q \setminus A) \tag{2.12}$$

Also ist $A = \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i$ auch η-messbar, d.h. $\mathfrak{A}^{\eta}$ ist ein vereinigungsstabiles Dynkinsystem. Insbesondere gilt nach Bemerkung 2.15

$$\eta(Q) = \eta(Q \cap A) + \eta(Q \setminus A).$$

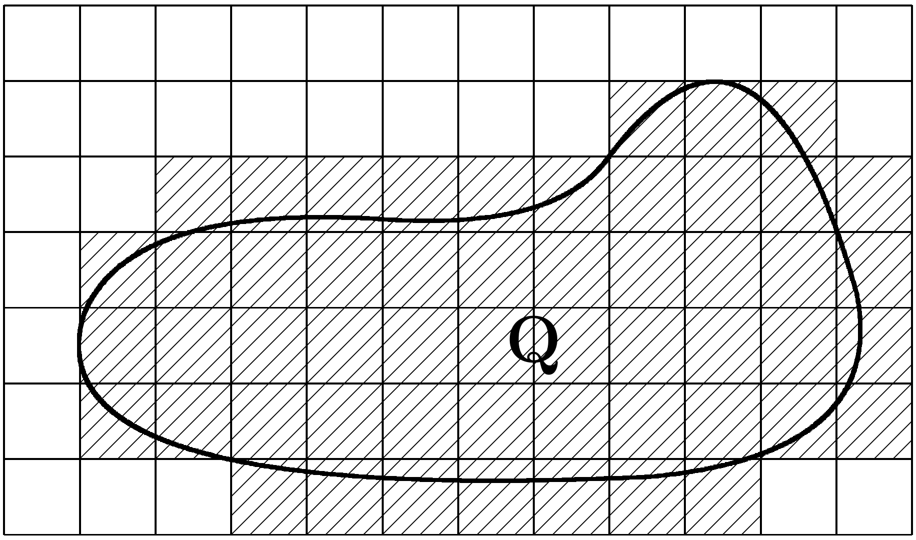
Wählt man speziell $Q = A = \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i$ liefert Ungleichung (2.12)

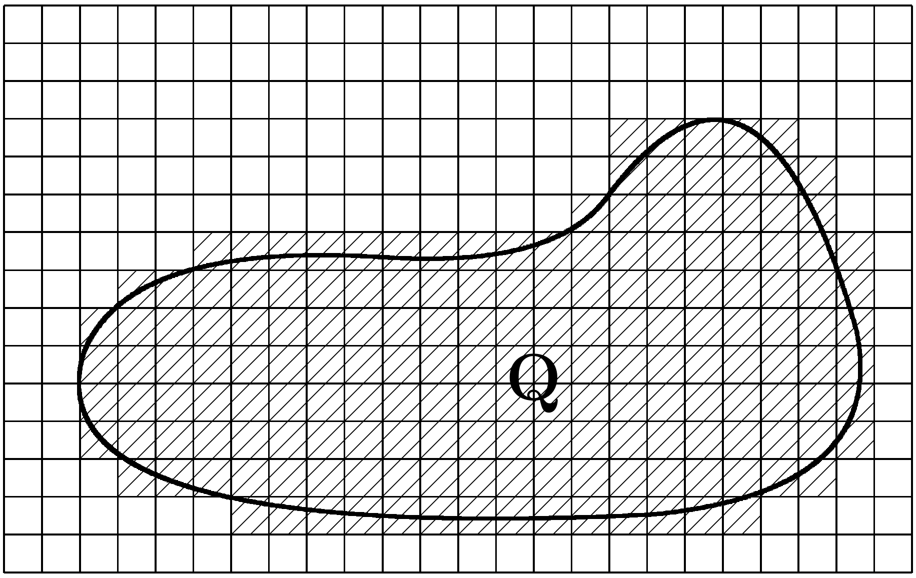
$$\eta\Big(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta(A_i),$$

also die σ-Additivität von η auf $\mathfrak{A}^{\eta}$, d.h. $\mu_{|\mathfrak{A}^{\eta}}$ ist ein Maß. ■

Wir wenden nun Satz 2.16 an und zeigen, dass zu jedem Prämaß ein äußeres Maß konstruiert werden kann. Die Konstruktion orientiert sich am zweidimensionalen Fall.
Ist $Q \subset \mathbb{R}^2$ eine ebene Menge (siehe folgende Abbildung), wird man zur Berechnung des äußeres Maßes von Q die Menge Q durch ein Netz quadratischer oder rechteckiger Maschen (2-dimensionalen Intervallen) überdecken. Die Fläche dieses Netzes kann als grobe Näherung für das äußere Maß von Q angesehen werden. Durch Verkleinerung der Maschenbreite erhält man bessere Näherungen, so dass es sich zur Verbesserung der Approximation anbietet, das Infimum über alle diese überdeckenden Netze zu bilden[7]. Wählt man im allgemeinen Fall als „Maschen" die Elemente des zugrundeliegenden Rings, lässt sich diese Konstruktion auch verallgemeinern.

[7]Wegen der Infimumsbildung müssen diese Maschen, auch wenn die Skizzen dies suggerieren, nicht unbedingt disjunkt oder gleich groß sein!! Dies kann gleichzeitig als erste Warnung betrachtet werden, jede auf der konkreten Vorstellung beruhende Argumentation im Bereich der Maßtheorie sorgfältig zu überprüfen.





Satz 2.17 (Fortsetzungssatz)

Ist μ ein Prämaß auf einem Ring $\mathfrak{R}$ über Ω, so existiert ein äußeres Maß $\mu^\star$ mit $\mu^\star_{|\mathfrak{R}} = \mu$. Insbesondere kann μ nach Satz 2.16 auf mindestens eine Weise zu einem Maß auf die von $\mathfrak{R}$ erzeugte σ-Algebra $\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{R})$ fortgesetzt werden. ❑

Beweis:

Für jede Menge $Q \subset \Omega$ bezeichne $\mathcal{U}_Q$ die Menge aller abzählbaren(!) Überdeckungen von Q in $\mathfrak{R}$, d.h. die Menge aller Folgen $(A_k)_{k=1}^\infty$ in $\mathfrak{R}$ mit

$$Q \subset \bigcup_{k=1}^\infty A_k.$$

Wir definieren dann

$$\mu^\star(Q) := \begin{cases} +\infty & \text{falls} \quad \mathcal{U}_Q = \emptyset \\ \inf\left\{ \sum\limits_{k=1}^\infty \mu(A_k) \mid (A_k)_{k=1}^\infty \in \mathcal{U}_Q \right\} & \text{falls} \quad \mathcal{U}_Q \neq \emptyset \end{cases}$$

und zeigen, dass $\mu^\star$ ein äußeres Maß[8] ist.

i) Da die konstante Folge $\emptyset, \emptyset, \emptyset, \ldots$ in $\mathcal{U}_\emptyset$ liegt, gilt $\mu^\star(\emptyset) = 0$.

ii) Ist $Q_1 \subset Q_2$, so gilt $\mathcal{U}_{Q_2} \subset \mathcal{U}_{Q_1}$ und daher aufgrund der Infimumbildung:

$$\mu^\star(Q_1) \leqslant \mu^\star(Q_2)$$

iii) Zum Beweis der dritten Eigenschaft eines äußeren Maßes, nämlich

$$\mu^\star\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^\star(Q_k)$$

kann zunächst $\mu^\star(Q_k) < \infty$, d.h. $\mathcal{U}_{Q_k} \neq \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{N}$ angenommen werden. Nach Definition von $\mu^\star(Q_k)$ existiert zu beliebigem $\epsilon > 0$ eine Folge $(A_{k,m})_{m=1}^{\infty}$ in $\mathcal{U}_{Q_k}$ mit:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_{k,m}) \leqslant \mu^\star(Q_k) + 2^{-k} \cdot \epsilon$$

Offensichtlich ist die Doppelfolge $(A_{k,m})_{k,m=1}^{\infty}$ eine Überdeckung von $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$, d.h. sie liegt in $\mathcal{U}_{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k}$, so dass nach Definition von $\mu^\star$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mu^\star\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k\Big) &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_{k,m}) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^\star(Q_k) + \epsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu^\star(Q_k) + \epsilon.
\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, gilt $\mu^\star\Big(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k\Big) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu^\star(Q_k)$.

Zum Abschluss zeigen wir nun noch, dass $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{A}^{\mu^\star}$ und damit $\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{A}^{\mu^\star}$ gilt. Die Einschränkung von $\mu^\star$ auf $\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{R})$ liefert dann das gesuchte Maß.
Sei dazu $A \in \mathfrak{R}$. Wir zeigen, dass $\mu^\star(Q) \geqslant \mu^\star(Q \cap A) + \mu^\star(Q \cap \complement A)$ für alle Mengen $Q \in \wp(\Omega)$ gilt, d.h. dass A $\mu^\star$-messbar ist. Hierzu kann offensichtlich o.B.d.A. $\mu^\star(Q) < \infty$, d.h. $\mathcal{U}_Q \neq \emptyset$ angenommen werden.
Wegen der endlichen Additivität von μ gilt für jedes $R \in \mathfrak{R}$:

$$\mu(R) = \mu(R \cap A) + \mu(R \cap \complement A)$$

[8] Falls man anstelle dieses äußeren Maßes mit einem analog definierten „inneren“ Maß arbeitet, indem man die Mengen Q von innen heraus approximiert, treten Probleme bei der dann erforderlichen Supremumsbildung auf.

und daher für jede Folge $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ in $\mathcal{U}_Q$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \cap A) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \cap \complement A)$$

Da die Folge $(A_k \cap A)_{k=1}^{\infty}$ in $\mathcal{U}_{Q\cap A}$ und die Folge $(A_k \cap \complement A)_{k=1}^{\infty}$ in $\mathcal{U}_{Q\cap \complement A}$ liegt, gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \cap A) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \cap \complement A) \geqslant \mu^\star(Q\cap A) + \mu^\star(Q\cap \complement A).$$

Da die Folge $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ in $\mathcal{U}_Q$ beliebig war, gilt

$$\mu^\star(Q) = \inf_{(A_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{U}_Q} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \geqslant \mu^\star(Q\cap A) + \mu^\star(Q\cap \complement A).$$

Nach Folgerung 2.9 gilt außerdem $\mu(A) \leqslant \mu^\star(A)$ und da die Folge $A, \emptyset, \emptyset, \ldots$ in $\mathcal{U}_A$ liegt, gilt auch $\mu^\star(A) \leqslant \mu(A)$, so dass $\mu^\star(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathfrak{R}$ folgt. Damit ist $\mu^\star$ auf $\sigma(\mathfrak{R})$ ein Maß mit $\mu^\star_{|\mathfrak{R}} = \mu$. ■

Es sollen nun noch ein paar Fälle behandelt werden, in denen die Fortsetzung des Prämaßes in Satz 2.17 eindeutig ist.

Definition 2.18

Sei μ ein Inhalt auf dem Ring $\mathfrak{R}$ über Ω. μ heißt

a) *endlich*, wenn $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathfrak{R}$ gilt.

b) σ-*endlich*, wenn eine Folge $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ in $\mathfrak{R}$ existiert mit $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \Omega$ und $\mu(A_k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$. ❐

Bemerkung 2.19

i) Ist μ ein endlicher Inhalt auf einem Ring $\mathfrak{R}$, so muss μ nicht automatisch σ-endlich sein, da im allgemeinen nicht $\Omega \in \mathfrak{R}$ gilt. Ein Beispiel für diesen Sachverhalt erhält man für $\Omega \neq \emptyset$ durch $\mathfrak{R} = \{\emptyset\}$ und $\mu(\emptyset) = 0$.
Ist μ dagegen endlich und gilt $\Omega \in \mathfrak{R}$, d.h. ist $\mathfrak{R}$ eine Algebra, so ist μ offensichtlich auch σ-endlich.

ii) μ ist genau dann σ-endlich, wenn eine isotone Folge $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ in $\mathfrak{R}$ mit $\Omega = \lim_{k\to\infty} A_k$ und $\mu(A_k) < \infty$ existiert.

iii) Ist μ ein endliches bzw. σ-endliches Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, wird das Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ auch als *endlicher Maßraum* bzw. σ-*endlicher Maßraum* bezeichnet. ❐

Beispiel 2.20

i) Das Lebesguesche Prämaß auf dem $\mathbb{R}^n$ ist σ-endlich und endlich. Betrachtet man die Intervalle $I_m := [-\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}[$ (wobei $\boldsymbol{m} = (m, \ldots, m)$), so gilt $\lambda(I_{\boldsymbol{m}}) < \infty$ und $\bigcup_{m=1}^{\infty} I_m = \mathbb{R}^n$.

ii) Sei $\Omega \neq \emptyset$, $\mathfrak{A} = \wp(\Omega)$ und ζ das Zählmaß auf $\mathfrak{A}$, d.h. $\zeta(A) := |A|$ (siehe Beispiel 2.3 i)). ζ ist genau dann σ-endlich, wenn Ω abzählbar oder endlich ist. ❐

Satz 2.21 (Eindeutigkeitssatz)

Sei $\mathfrak{E}$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ über Ω. In $\mathfrak{E}$ existiere eine Folge $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ von Mengen mit $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k = \Omega$. Sind μ_1, μ_2 zwei Maße mit den Eigenschaften

i) $\forall E{\in}\mathfrak{E} : \mu_1(E) = \mu_2(E)$

ii) $\forall k{\in}\mathbb{N} : \mu_1(E_k) = \mu_2(E_k) < \infty$,

so sind die beiden Maße gleich, d.h. es gilt $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathfrak{A}$. ❐

Beweis:

Es sei $E \in \mathfrak{E}$ mit $\mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty$. Wir betrachten nun das System

$$\mathfrak{D}_E := \{D{\in}\mathfrak{A} \mid \mu_1(E{\cap}D) = \mu_2(E{\cap}D)\}.$$

Wie man leicht nachprüft, ist $\mathfrak{D}_E$ ein Dynkinsystem, das aufgrund der Durchschnittsstabilität von $\mathfrak{E}$ und wegen $\mu_{1|_\mathfrak{E}} = \mu_{2|_\mathfrak{E}}$ das Mengensystem $\mathfrak{E}$ enthält. Daher gilt

$$\boldsymbol{\delta}(\mathfrak{E}) \subset \mathfrak{D}_E \subset \mathfrak{A}.$$

Wegen der Durchschnittsstabilität von $\mathfrak{E}$ gilt nach Satz 1.20 b) jedoch

$$\boldsymbol{\delta}(\mathfrak{E}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{E}) = \mathfrak{A}$$

und daher

$$\mathfrak{D}_E = \mathfrak{A}.$$

Betrachtet man nun die Folge $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$F_1 := E_1,\ F_2 := E_2 \backslash E_1, \ldots,\ F_n := E_n \backslash (E_1 \cup \ldots \cup E_{n-1}), \ldots,$$

so ist $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{A}$ mit den Eigenschaften $F_k \subset E_k$ und $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k = \Omega$. Ist $A \in \mathfrak{A}$ beliebig, so folgt wegen $F_k{\cap}A \in \mathfrak{A} = \mathfrak{D}_{E_k}$

$$\mu_1(F_k{\cap}A) = \mu_1(E_k{\cap}F_k{\cap}A) = \mu_2(E_k{\cap}F_k{\cap}A) = \mu_2(F_k{\cap}A)$$

Aus der σ-Additivität von μ_1 und μ_2 folgt damit schließlich:

$$\begin{aligned} \mu_1(A) &= \mu_1\Big(\dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}}(F_k{\cap}A)\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(F_k{\cap}A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_2(F_k{\cap}A) \\ &= \mu_2\Big(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}}(F_k{\cap}A)\Big) = \mu_2(A) \end{aligned}$$

Daher gilt $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathfrak{A}$. ∎

Satz 2.22

Jedes σ-endliche Prämaß μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ in einer Menge Ω kann auf genau eine Weise zu einem Maß auf $\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{R})$ fortgesetzt werden. ❑

Beweis:

Wegen der σ-Endlichkeit von μ besitzt $\mathfrak{R}$ alle Eigenschaften des Erzeugers $\mathfrak{E}$ in Satz 2.21. ■

Folgerung 2.23

Es gibt genau ein Maß λ^n auf der σ-Algebra $\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{F}^n)=\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{J}^n)$, das jedem Intervall $I\in\mathfrak{J}^n$ seinen Elementarinhalt zuordnet. λ^n heißt das *Lebesgue-Borelsche Maß* auf $\mathbb{R}^n$. Die von den halboffenen Intervallen $\mathfrak{J}^n$ erzeugte σ-Algebra heißt[9] die σ-Algebra der *Borelschen Mengen* $\mathfrak{B}^n$. ❐

Bemerkung 2.24

i) Das Tripel $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n, \lambda^n)$ wird als *Lebesgue-Borelscher Maßraum* bezeichnet.

ii) Das Lebesgue-Borelsche Maß ist σ-endlich. Allgemeiner gilt $\lambda^n(B) < \infty$ für jede beschränkte Teilmenge $B\in\mathfrak{B}^n$, da $B\subset I$ für ein genügend großes $I\in\mathfrak{J}^n$ gilt.

iii) Für jede Menge $C \in \mathfrak{B}^n$ besteht die Spur-σ-Algebra $C \cap \mathfrak{B}^n$ aus allen Borelschen Teilmengen von C. Die Restriktion von λ^n auf C wird auch das *Lebesgue-Borelsche Maß* auf C genannt. ❐

Es soll nun noch die σ-Algebra der Borelschen Mengen etwas näher untersucht werden, insbesondere die Frage, ob topologisch interessante Mengen, wie offene, abgeschlossene oder kompakte Mengen in $\mathfrak{B}^n$ liegen.

Satz 2.25

Es bezeichne $\mathfrak{O}^n$ bzw. $\mathfrak{C}^n$ bzw. $\mathfrak{K}^n$ das System aller offenen bzw. abgeschlossenen bzw. kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\mathfrak{B}^n = \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{J}^n) = \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{O}^n) = \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{C}^n) = \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{K}^n).$$ ❑

Beweis:

Da jede kompakte Menge des $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist, gilt

$$\mathfrak{K}^n \subset \mathfrak{C}^n \subset \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{C}^n)$$

und damit

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{K}^n) \subset \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{C}^n).$$

[9]Dass diese Bezeichnung im Sinne von Bemerkung **?? ??**) angebracht ist, zeigt Satz 2.25.

Da jede abgeschlossene Menge C des $\mathbb{R}^n$ abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist (zum Beispiel $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C \cap B_n(0)$), gilt auch

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{C}^n) \subset \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{K}^n),$$

also $\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{C}^n) = \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{K}^n)$. Da eine Menge genau dann offen ist, wenn ihr Komplement abgeschlossen ist, gilt außerdem

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{C}^n) = \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{O}^n).$$

Wir zeigen abschließend noch, dass $\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{O}^n) = \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{J}^n)$ gilt.
Ist $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[\in \mathfrak{J}^n$ und $(\boldsymbol{a}_k)_{k=1}^{\infty}$ eine gegen $\boldsymbol{a}$ konvergierende Folge mit $\boldsymbol{a}_k < \boldsymbol{a}$, so gilt

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}]\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}[= [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[.$$

Da die Intervalle $]\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}[$ offen sind, gilt $\mathfrak{J}^n \subset \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{O}^n)$ und daher $\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{J}^n) \subset \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{O}^n)$.
Da jedes offene Intervall $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ wiederum als Vereinigung einer Folge von Intervallen aus $\mathfrak{J}^n$ dargestellt werden kann, z.B.

$$]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[= \bigcup_{k=1}^{\infty} [\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}[, \qquad \text{wobei } \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a} \text{ mit } \boldsymbol{a}_k > \boldsymbol{a},$$

folgt $\mathfrak{O}^n \subset \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{J}^n)$ und damit $\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{O}^n) \subset \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{J}^n)$, also $\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{O}^n) = \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{J}^n)$. ■

Bemerkung 2.26

i) Ist $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und A eine *μ-Nullmenge*, d.h. gilt $\mu(A) = 0$, so ist zwar jede zu $\mathfrak{A}$ gehörende Teilmenge von A aus Isotoniegründen selbst eine μ-Nullmenge, jedoch braucht nicht jede Teilmenge von A zu $\mathfrak{A}$ zu gehören.
Ist diese Eigenschaft erfüllt, d.h. gehört jede Teilmenge einer μ-Nullmenge zu $\mathfrak{A}$, so nennt man μ ein *vollständiges Maß*.

ii) Prinzipiell kann jedes Maß μ auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ über Ω vervollständigt werden. Genauer gilt:
Es existiert ein vollständiges Maß μ_0 auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}_0$, die $\mathfrak{A}$ enthält, mit $\mu_{0|\mathfrak{A}} = \mu$. μ_0 ist minimal, d.h. es hat die Eigenschaft, dass jedes μ fortsetzende, vollständige Maß μ' auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}' \supset \mathfrak{A}$ schon eine Fortsetzung von μ_0 ist.
$\mathfrak{A}_0$ besteht aus allen Mengen $A \cup N$ mit $A \in \mathfrak{A}$ und N Teilmenge einer μ-Nullmenge. Für diese Mengen gilt $\mu_0(A \cup N) = \mu(A)$.

iii) Die Vervollständigung des Lebesgue-Borelschen Maßes $\mathbb{R}^n$ heißt *Lebesguesches Maß* im $\mathbb{R}^n$ und die Mengen seines Definitionsbereiches heißen *Lebesgue-messbar*. Die zugehörigen Nullmengen heißen *Lebesgue-Nullmengen*.
Beim Übergang von den Borelschen Mengen zu den Lebesgue-messbaren Mengen geht jedoch die in Satz 2.25 hergeleitete wichtige Eigenschaft der Borelschen Mengen verloren, nur durch die Topologie des Raumes $\mathbb{R}^n$ bestimmt zu sein. ❐

Bevor wir uns eingehender mit dem Lebesgue-Maß beschäftigen, sollen zunächst in einem Beispiel die Lebesgue-Maße geometrisch einfacher Borelmengen berechnet werden.

Beispiel 2.27

i) Sei H eine zu einer Koordinatenachse des $\mathbb{R}^n$ orthogonale Hyperebene, d.h. gelte $H = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = \alpha\} = \{\alpha \cdot \boldsymbol{e}_i\} + \{\boldsymbol{e}_i\}^\perp$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist H eine Lebesgue-Borelsche Nullmenge, d.h. es gilt $\lambda^n(H) = 0$.

Beweis:
Definiert man zu beliebigem $\epsilon > 0$ für $k \in \mathbb{N}$ die Vektoren $\boldsymbol{x}_k$ bzw. $\boldsymbol{y}_k \in \mathbb{R}^n$ durch

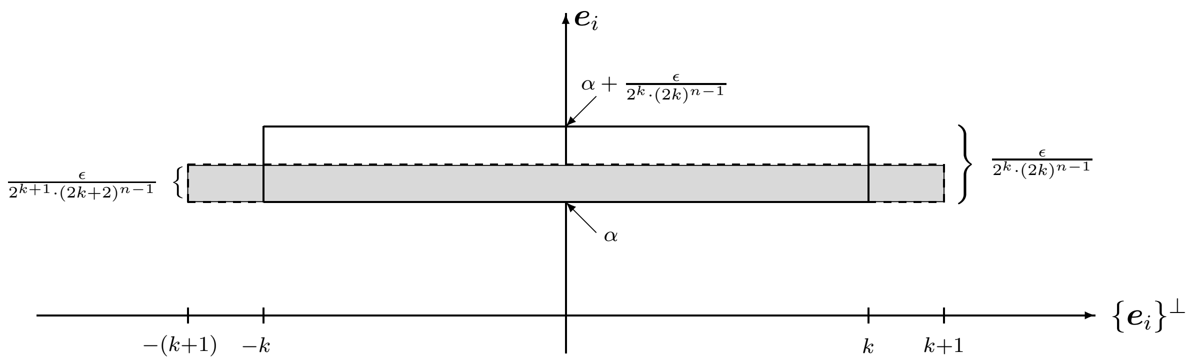
$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{x}_k & := & (-k\,, -k\,, \dots, -k\,, \overset{\substack{i\text{-te Komponente}\\ \downarrow}}{\alpha}\,, -k\,, \dots, -k) \\ \boldsymbol{y}_k & := & (\;k\,,\; k\,, \dots,\; k\,, \alpha + 2^{-k} \cdot (2k)^{1-n} \cdot \epsilon\,,\; k\,, \dots,\; k) \end{array}$$

so gilt offensichtlich

$$H \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_k[$$

und

$$\lambda([\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_k[) = (2k)^{n-1} \cdot 2^{-k} \cdot (2k)^{1-n} \cdot \epsilon = 2^{-k} \cdot \epsilon.$$



Nach Folgerung 2.9 erhält man daher

$$\lambda(H) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda([\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_k[) = \epsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $\lambda(H) = 0$. Wegen der Isotonie von Maßen ist damit auch jede Borelsche Teilmenge der Hyperebene H eine Lebesgue-Borelsche Nullmenge. ∎

ii) Jede abzählbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist eine Lebesgue-Borelsche-Nullmenge. Insbesondere gilt $\lambda(\mathbb{Q}^n) = 0$.

Beweis:
Wegen der σ-Additivität von Maßen genügt es, den Fall einer einpunktigen Menge zu betrachten, d.h. $\lambda(\{\boldsymbol{x}\}) = 0$ zu zeigen. Als abgeschlossene Mengen sind einpunktige Mengen in $\mathfrak{B}^n$, also kann $\lambda(\{\boldsymbol{x}\})$ berechnet werden. Da eine Hyperebene H wie in Teil i) mit $\{\boldsymbol{x}\} \subset H$ gewählt werden kann, gilt $\lambda(\{\boldsymbol{x}\}) = 0$. ■

iii) Sind $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{b}$, so gilt

$$\lambda^n([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[) = \lambda^n([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]) = \lambda^n(]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]) = \lambda^n(]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[).$$

Beweis:
Ist $\boldsymbol{a}=(a_1, \ldots, a_n)$, $\boldsymbol{b}=(b_1, \ldots, b_n)$ und definiert man für $i=1, \ldots, n$ die Hyperebenen

$$\begin{aligned} H_{a_i} &:= \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = a_i\} \\ H_{b_i} &:= \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = b_i\}, \end{aligned}$$

so gilt offensichtlich

$$]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[= [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \backslash (H_{a_1} \cup \cdots \cup H_{a_n} \cup H_{b_1} \cup \cdots \cup H_{b_n}).$$

Da nach Teil i) dieses Beispiels $\lambda(H_{a_i}) = \lambda(H_{b_i}) = 0$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt, folgt

$$\lambda(]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[) = \lambda([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]).$$

Wegen $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[\subset [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[\subset [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ und $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[\subset]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subset [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ gilt daher aufgrund der Isotonie von Maßen

$$\lambda(]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[) = \lambda([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[) = \lambda(]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]) = \lambda([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]).$$

Man beachte hierbei, dass $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ Borelsch ist, wegen

$$]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \backslash (H_{a_1} \cup \cdots \cup H_{a_n}).$$ ■

2.4. Lebesgue-Stieltjes-Maße auf den Borelschen Mengen von $\mathbb{R}$

Es sollen nun noch die Maße auf der σ-Algebra $\mathfrak{B}^1$ der Borelschen Teilmengen in $\mathbb{R}$ genauer charakterisiert werden. Hierbei lässt sich die Konstruktion des Lebesgue-Borel-Maßes fast unverändert übertragen. Grundidee ist hierbei, das durch $\lambda([a, b[) = b-a$

definierte Lebesguemaß dadurch zu verallgemeinern, dass man für eine Funktion g ein Maß λ_g durch folgende Forderung erzeugt:

$$\lambda_g([a,b[) := g(b) - g(a)$$

Auf der „Integralseite“ führt dies zum sog. *Riemann-Stieltjes-Integral.* Ist umgekehrt μ ein Maß auf den Borelmengen, wird man versuchen, eine geeignete Funktion g mit der Eigenschaft

$$\mu([a,b[) = \lambda_g([a,b[) = g(b) - g(a)$$

zu finden.

Satz 2.28
Sei μ ein Maß in $\mathbb{R}$ auf der σ-Algebra $\mathfrak{B}^1 = \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{J})$.

a) Ist μ auf $\mathfrak{J}$ endlich, so existiert eine bis auf additive Konstanten eindeutig bestimmte isotone, linksseitig stetige reelle Funktion g mit $\mu([a,b[) = g(b) - g(a)$.

b) Ist μ auf $\mathfrak{B}^1 = \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{J})$ endlich, d.h. gilt $\mu(\mathbb{R}) < \infty$, so ist die Funktion g durch die Forderung $0 \leqslant g \leqslant \mu(\mathbb{R})$ eindeutig bestimmt und besitzt in diesem Fall zusätzlich die Eigenschaften

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = \mu(\mathbb{R}).$$

❏

Beweis:

a) Sei μ ein Maß auf $\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{J})$, das endlich auf $\mathfrak{J}$ ist. Wir definieren $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch[10]:

$$g(x) = \begin{cases} \mu([0,x[) & \text{für} \quad x \geqslant 0 \\ -\mu([x,0[) & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

Dann gilt für $a \leqslant 0 \leqslant b$:

$$\mu([a,b[) = \mu([a,0[) + \mu([0,b[) = -g(a) + g(b)$$

Für den Fall $0 \leqslant a \leqslant b$ folgt daraus nach Eigenschaft 2.8 (3) von μ:

$$\begin{aligned} \mu([a,b[) &= \mu\Big([0,b[\setminus[0,a[\Big) \\ &\overset{2.8\ (3)}{=} \mu([0,b[) - \mu([0,a[) \\ &= g(b) - g(a) \end{aligned}$$

[10]Der Versuch, die Funktion g einfach durch $g(x) = \mu([-\infty,x[)$ zu definieren, scheitert, weil damit gerechnet werden muss, dass $\mu([-\infty,x[) = \infty$ gilt. Praktikabel ist dies jedoch bei endlichen Maßen, wie z.B. Wahrscheinlichkeitsmaßen. Dies nützen wir in Teil b) des Beweises aus.

Im Fall $a \leqslant b \leqslant 0$ folgt analog

$$\begin{aligned} \mu([a,b[) &= \mu\Big([a,0[\setminus[b,0[\Big) \\ &\overset{2.8\ (3)}{=} \mu([a,0[) - \mu([b,0[) \\ &= -g(a) - (-g(b)) \\ &= g(b) - g(a) \end{aligned}$$

Die Isotonie von g ergibt sich aus folgenden Überlegungen.

Für $0 \leqslant x < y$ gilt $[0,x[\subset [0,y[$ und daher wegen der Isotonie von μ

$$g(x) = \mu([0,x[) \leqslant \mu([0,y[) = g(y)$$

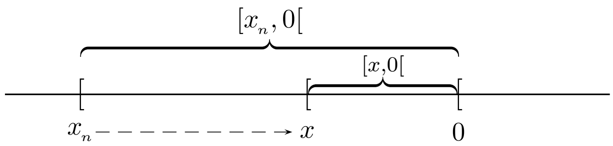
Im Fall $x \leqslant 0 < y$ gilt $g(x){\leqslant}0$ und $g(y){\geqslant}0$ nach Definition von g, also

$$g(x) \leqslant g(y).$$

Schließlich folgt aus $x < y \leqslant 0$ die Teilmengenbeziehung $[x,0[\supset [y,0[$ und damit $\mu([x,0[) \geqslant \mu([y,0[)$ oder äquivalent

$$g(x) = -\mu([x,0[) \leqslant -\mu([y,0[) = g(y).$$

Wir zeigen nun die linksseitige Stetigkeit von g. Hierzu wählen wir $x \in \mathbb{R}$ beliebig und betrachten zunächst eine isotone Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.



Ist $x \leqslant 0$, konvergieren die Intervalle $[x_n, 0[$ antiton gegen $[x,0[$ und da μ stetig von oben ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mu([x_n,0[) = \mu([x,0[),$$

also

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} -\mu([x_n,0[) = -\mu([x,0[) = g(x).$$

Analog zeigt man im Fall $x > 0$

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x).$$

Sei nun $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ eine beliebige von links gegen x konvergierende Folge und $\epsilon > 0$ beliebig. Da die Folge $(x - \frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ isoton gegen x konvergiert, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} g(x - \frac{1}{n}) = g(x)$, d.h. es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|g\Big(x - \tfrac{1}{n_0}\Big) - g(x)| < \epsilon.$$

Da $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ gegen x konvergiert, kann ein $k_0 \in \mathbb{N}$ bestimmt werden, mit

$$x-\frac{1}{n_0} \leqslant x_k \leqslant x$$

für alle $k \geqslant k_0$. Da g isoton ist, folgt für alle $k \geqslant k_0$

$$|g(x_k) - g(x)| \leqslant |g\Big(x-\frac{1}{n_0}\Big) - g(x)| < \epsilon.$$

Also ist g linksseitig stetig.

Ist f eine weitere linksseitig stetige Funktion mit $\mu([a,b[) = f(b) - f(a)$, so folgt wegen $g(0) = 0$ im Fall $b \geqslant 0$

$$f(b) - f(0) = \mu([0,b[) = g(b) - g(0) = g(b)$$

und im Fall $b < 0$

$$f(0) - f(b) = \mu([b,0[) = g(0) - g(b) = -g(b).$$

In beiden Fällen gilt also

$$f(b) = g(b) + f(0),$$

d.h. $f = g + C$ mit $C = f(0)$.

b) Sei μ auf $\mathfrak{B}^1 = \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{J})$ endlich und sei f eine isotone und linksseitig stetige Funktion mit $\mu([a,b[) = f(b) - f(a)$ und der Eigenschaft $0 \leqslant f \leqslant \mu(\mathbb{R})$. Nach Beweisteil a) gilt mit der dort konstruierten Funktion g

$$f(x) = g(x) + f(0) = \left\{ \begin{array}{rl} \mu([0,x[) & \text{für} \quad x\geqslant 0 \\ -\mu([0,x[) & \text{für} \quad x<0 \end{array} \right\} + f(0)$$

Mit folgender Überlegung zeigen wir nun, dass $f(0) = \mu(]-\infty,0[)$ gilt.
Nach Definition von g, den Stetigkeitseigenschaften des Maßes μ und $f\geqslant 0$ folgt

$$\begin{aligned} \mu(]-\infty,0[) &\leqslant \mu(]-\infty,0[) + \overbrace{\lim_{x\to-\infty} f(x)}^{\geqslant 0} \\ &= \mu(]-\infty,0[) + \lim_{x\to-\infty} g(x) + f(0) \\ &= \mu(]-\infty,0[) + \lim_{x\to-\infty} -\mu([x,0[) + f(0) \\ &= f(0) \end{aligned}$$

Andererseits ergibt sich aus der Eigenschaft $f \leqslant \mu(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\mu(]-\infty,0[) &\geqslant \overbrace{\lim_{x\to\infty} f(x)-\mu(\mathbb{R})}^{\leqslant 0} + \mu(]-\infty,0[) \\
&= \overbrace{f(0)+\lim_{x\to\infty} g(x)}^{f(x)} - \mu(\mathbb{R}) + \mu(]-\infty,0[\\
&= f(0)+\lim_{x\to\infty} \mu([0,x[) - \mu([0,\infty[) \\
&= f(0)
\end{aligned}$$

Damit folgt schließlich

$$f(x) = g(x) + f(0) = \left\{ \begin{array}{rll} \mu([0,x[) & \text{für} & x\geqslant 0 \\ -\mu([0,x[) & \text{für} & x<0 \end{array} \right\} + \mu(]-\infty,0[) = \mu(]-\infty,x[)\ ,$$

d.h. f ist eindeutig. ■

Beispiel 2.29

i) Das Lebesgue-Borelsche Maß λ auf $(\mathbb{R},\mathfrak{B})$ wird durch die Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $g(x)=x$ erzeugt.

ii) Sei ϵ_{x_0} das im Punkt $x_0\in\mathbb{R}$ konzentrierte Einheitsmaß auf $(\mathbb{R},\wp(\mathbb{R}))$. ϵ_{x_0} wird durch die *Heavyside-Funktion* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $g(x)=\begin{cases} 0 & \text{für } x\leqslant x_0 \\ 1 & \text{für } x>x_0 \end{cases}$ erzeugt. ❐

Bemerkung 2.30

Ist μ ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* auf $(\mathbb{R},\mathfrak{B})$, d.h. gilt $\mu(\mathbb{R})=1$, so wird die gemäß Satz 2.28 durch $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=1$ eindeutig bestimmte μ darstellende Funktion g als *Verteilungsfunktion von* μ bezeichnet. Man beachte hierzu auch Bemerkung 3.10. ❐

Satz 2.31

Jede linksseitig stetige, isotone Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ erzeugt auf $(\mathbb{R},\mathfrak{B})$ ein eindeutig bestimmtes σ-endliches Maß λ_g, das nach Satz 2.28 die Funktion g selbst bis auf additive Konstanten festlegt. Ist g auf $\mathbb{R}$ beschränkt, so ist λ_g ein endliches Maß. λ_g heißt das zu g gehörende *Lebesgue-Stieltjes Maß.* ❐

Beweis:

Sei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ linksseitig stetig und isoton. Definiert man für $a\leqslant b\in\mathbb{R}$

$$\lambda_g([a,b[) := g(b)-g(a)\ ,$$

so ist λ_g ein Inhalt auf dem Halbring $\mathfrak{J}$ der Intervalle, der sich nach Satz 2.4 vermöge

$$\lambda_g\Big(\dot{\bigcup_{j=1}^{\infty}} I_j\Big) := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_g(I_j)$$

auf den Ring der Figuren $\mathfrak{F} = \boldsymbol{\rho}(\mathfrak{J})$ fortsetzen lässt. Aufgrund der linksseitigen Stetigkeit von g, existiert zu jedem Intervall $I = [a, b[$ und jedem $\epsilon > 0$ ein Intervall $J = [a, c[$ mit $\bar{J} \subset I$ und

$$\lambda_g(I) - \lambda_g(J) = \lambda_g([c, b[) = g(b) - g(c) < \epsilon.$$

Wie im Beweis von Satz 2.13 kann damit gezeigt werden, dass λ_g nullstetig und damit nach Satz 2.11 ein Prämaß auf $\mathfrak{F}$ ist (λ_g ist auf $\mathfrak{F}$ endlich).
Nach Satz 2.21 bzw. 2.22 kann dieses Prämaß aufgrund der σ-Endlichkeit auf genau eine Weise zu einem Maß auf $\mathfrak{B} = \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{J})$ fortgesetzt werden. ■

Bemerkung 2.32

i) Verwendet man anstelle von $\mathfrak{J}$ den Halbring der nach links offenen Intervalle $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ (mit $\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{b}$), so ist die linksseitige Stetigkeit entsprechend durch die rechtsseitige Stetigkeit zu ersetzen.

ii) Die Sätze 2.28 und 2.31 liefern insbesondere, dass eine Bijektion zwischen den Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ und den Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}$ besteht.

iii) Die Ergebnisse dieses Abschnittes kann man problemlos auf den n-dimensionalen Fall der Borelmengen $\mathfrak{B}^n = \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{J}^n)$ übertragen (s. z.B. Elstrodt, Kapitel II, §3, 5).

iv) Eine detailliertere Beweisanalyse der Sätze 2.28 und 2.31 zeigt, dass die linksseitige Stetigkeit nur für die σ-Additivität der Maße benötigt wird. Genauer gilt:
Ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ isoton, so wird durch $\mu_g([a, b[) := g(b) - g(a)$ ein endlicher Inhalt definiert. μ_g ist genau dann ein Prämaß, wenn g linksseitig stetig ist.

v) Sind g_1 und g_2 zwei isotone Funktionen, so gilt offensichtlich

$$\lambda_{g_1+g_2} = \lambda_{g_1} + \lambda_{g_2}.$$ ❐

Satz 2.33

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linksseitig stetig und isoton. λ_g bezeichne das zu g gehörende Lebesgue-Stieltjes-Maß. Dann gilt:

a) $\lambda_g(\{x_0\}) = \lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) - g(x_0)$.

b) $\lambda_g(\{x_0\}) = 0 \iff g$ stetig in x_0.

c) g ist genau dann stetig, wenn $\lambda_g(B)=0$ gilt für alle abzählbaren Borelmengen B. ❐

Beweis:

a) Sei $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine von „rechts" gegen x_0 konvergente Folge. Dann ist $\Big([x_0, x_n[\Big)_{n=1}^\infty$ eine antitone Folge von Intervallen mit

$$\lim_{n\to\infty}[x_0, x_n[= \bigcap_{n=1}^\infty [x_0, x_n[= \{x_0\}.$$

Da λ_g stetig von oben ist, gilt daher

$$\lambda_g(\{x_0\}) \;=\; \lambda_g\Big(\lim_{n\to\infty}[x_0, x_n[\Big) \;=\lim_{n\to\infty}\Big(g(x_n) - g(x_0)\Big) \;=\lim_{x\to x_0^+} g(x) - g(x_0)$$

b) Nach Teil a) gilt

$$\lambda_g(\{x_0\}) = 0 \iff \lim_{x\to x_0^+} g(x) = g(x_0) \iff g \text{ rechtsseitig stetig in } x_0.$$

Da g nach Voraussetzung linksseitig stetig ist, folgt die Behauptung.

c) Diese Aussage ist eine direkte Folgerung aus b). ■

Satz 2.34

Zu jeder isotonen linksseitig stetigen Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existieren eine linksseitig stetige isotone Treppenfunktion $g_d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit abzählbar vielen Sprungstellen und eine isotone stetige Funktion $g_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $g = g_d + g_c$. Die Funktionen g_d und g_c sind bis auf additive Konstanten eindeutig bestimmt, und für die zugehörigen Lebesgue-Stieltjes-Maße gilt $\lambda_g = \lambda_{g_d} + \lambda_{g_c}$. ❑

Beweis:

Sei g eine isotone, linksseitig stetige Funktion. Da eine isotone Funktion nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt (siehe Anhang Satz C.16), bezeichne $\mathfrak{D}_g = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller Unstetigkeitsstellen von g und d_i die zu x_i gehörende Sprunghöhe von g, d.h.

$$d_i := \lim_{x\downarrow x_i} g(x) - g(x_i).$$

Für das Maß $\epsilon := \sum_{i\in\mathbb{N}} d_i \epsilon_{x_i}$ gilt offensichtlich

$$\epsilon(\{x\}) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x \notin \mathfrak{D}_g \\ d_i & \text{falls} \quad x = x_i \end{cases}, \quad \text{bzw.} \quad \epsilon(B) = \sum_{i\in\mathbb{N}} d_i \epsilon_{x_i}(B) = \sum_{\substack{i\in\mathbb{N} \\ x_i\in B}} d_i.$$

g_d bezeichne die nach Satz 2.28 bis auf eine Konstante eindeutig bestimmte isotone, linksseitig stetige Funktion, mit $\epsilon = \lambda_{g_d}$. Da g_d die gleichen Sprungstellen mit gleicher Sprunghöhe wie g aufweist und zwischen zwei benachbarten Sprungstellen konstant ist, ist die

Funktion $g_c := g - g_d$ stetig. Aus dem gleichen Grund und wegen der Isotonie von g gilt dann $g(b) - g(a) \geqslant g_d(b) - g_d(a)$. Also ist g_c ebenfalls isoton, denn für $b \geqslant a$ folgt

$$g_c(b) - g_c(a) = g(b) - g(a) - \big(g_d(b) - g_d(a)\big) \geqslant 0,$$

d.h. $g_c(b) \geqslant g_c(a)$. Damit erzeugt g_c ein Lebesgue-Stieltjes-Maß und es gilt

$$\lambda_g = \lambda_{g_d + g_c} \overset{2.32\ \text{v)}}{=} \lambda_{g_d} + \lambda_{g_c}. \qquad \blacksquare$$

Bemerkung 2.35

i) Deutet man Maße als Massenverteilung, so beschreibt λ_{g_d} in Satz 2.34 eine diskrete Massenverteilung, bei der in den Punkten x_i die Masse d_i platziert ist. λ_{g_c} stellt dagegen eine kontinuierliche Massenverteilung dar. Der letzte Satz besagt daher, dass jede Massenverteilung auf $\mathbb{R}$, bei welcher in jedem beschränkten Intervall nur eine endliche Masse vorhanden ist, als Überlagerung einer diskreten und einer kontinuierlichen Massenverteilung dargestellt werden kann.

ii) In Kapitel 4 werden wir sehen, dass

$$\int f(x)\, d\lambda_g(x) = \int f(x)\, dg(x)$$

gilt, wobei $\int f(x)\, dg(x)$ das Riemann-Stieltjes-Integral der Funktion f bezeichnet. ❐

3. Messbare Abbildungen

Der Begriff des Messraumes weist eine starke Analogie zum Begriff des topologischen Raumes auf. Dies ist ein 2-Tupel $(\Omega, \mathfrak{T})$, das aus einer Grundmenge Ω und einem Mengensystem $\mathfrak{T} \subset \wp(\Omega)$ - den offenen Mengen - besteht (siehe Anhang, Definition D.4). Die Topologie $\mathfrak{T}$ enthält die Mengen $\emptyset$ und Ω und ist unter anderem gegenüber beliebigen Vereinigungen abgeschlossen.
Analog ist ein Messraum $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein 2-Tupel, bestehend aus einer Grundmenge Ω und einem Mengensystem $\mathfrak{A} \subset \wp(\Omega)$, den messbaren Mengen (siehe Kapitel 1, Definition 1.2). Die σ-Algebra $\mathfrak{A}$ enthält $\emptyset$ und Ω und ist unter anderem gegenüber abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen.
Bei der Arbeit mit topologischen Räumen spielt der Begriff der stetigen Abbildung eine entscheidende Rolle. Dies sind Abbildungen die in gewisser Weise die Elemente der Topologie (die offenen Mengen) erhalten. Genauer gilt:
Sind $(\Omega, \mathfrak{T})$ und $(\Omega', \mathfrak{T}')$ zwei topologische Räume, so heißt eine Abbildung

$$f : (\Omega, \mathfrak{T}) \to (\Omega', \mathfrak{T}')$$

stetig, wenn die Urbilder offener Mengen aus Ω' wieder offen in Ω sind, d.h. wenn gilt

$$\forall O \in \mathfrak{T}' : f^{-1}(O) \in \mathfrak{T}$$

oder kürzer

$$f^{-1}(\mathfrak{T}') \subset \mathfrak{T}.$$

Man beachte hierzu auch Definition D.16 des Anhangs. Die Analogie zwischen messbaren und offenen Mengen findet auch bei Abbildungen ihre Fortsetzung und führt zum Begriff der messbaren Abbildung. Dies sind Funktionen, die in gewisser Weise die Elemente der σ-Algebra erhalten.
Im Folgenden bezeichnen $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ zwei Messräume.

3.1. Messbare Abbildungen

Definition 3.1

Eine Abbildung $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega', \mathfrak{A}')$ heißt $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-*messbar*, wenn gilt[1]:

$$f^{-1}(\mathfrak{A}') \subset \mathfrak{A}.$$

[1]Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ aus dem Kontext ersichtlich, spricht man von einer messbaren Abbildung.

Ist $(\Omega', \mathfrak{A}') = (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, so heißt f *Borelmessbare* oder *reelle messbare Funktion*[2]. Im Fall $\Omega' = \mathbb{R}^\star = \mathbb{R}\cup\{+\infty, -\infty\}$, $\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}^\star = \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{B}\cup\{+\infty, -\infty\})$ wird f als *numerisch messbare Funktion* bezeichnet. ❐

Beispiel 3.2

i) Jede konstante Abbildung zwischen zwei beliebigen Messräumen ist messbar.

ii) Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Messraum und $A\subset\Omega$. Dann ist die *Indikatorfunktion (charakteristische Funktion[3])* $\mathbb{1}_A : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \omega \in A \\ 0 & \text{falls} \quad \omega \notin A \end{cases}$$

genau dann Borelmessbar, wenn $A \in \mathfrak{A}$ gilt. ❐

Satz 3.3

Es sei $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega', \mathfrak{A}')$ eine Abbildung und $\mathfrak{E}'$ ein Erzeuger von $\mathfrak{A}'$. Dann gilt

$$f \text{ ist } \mathfrak{A}\text{-}\mathfrak{A}'\text{-messbar} \iff f^{-1}(\mathfrak{E}') \subset \mathfrak{A}.$$ ❑

Beweis:

Aufgrund der Eigenschaften der Urbildmengenbildung f^{-1} ist

$$\mathfrak{Q}' := \{Q' \subset \Omega' \mid f^{-1}(Q') \in \mathfrak{A}\}$$

eine σ-Algebra in Ω' (siehe auch Beispiel 1.3 vi)). Offensichtlich ist f genau dann messbar, wenn $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{Q}'$ gilt. Dies ist jedoch genau dann erfüllt, wenn $\mathfrak{E}' \subset \mathfrak{Q}'$ gilt, d.h. wenn $f^{-1}(\mathfrak{E}') \subset \mathfrak{A}$ erfüllt ist. ■

Beispiel 3.4

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung, so ist f nach Satz 3.3 automatisch $\mathfrak{B}^n$-$\mathfrak{B}^m$-messbar, da die offenen Mengen nach Satz 2.25 ein Erzeugendensystem der Borelmengen bilden. ❐

Satz 3.5

Die Verkettung messbarer Abbildungen ist wieder messbar, d.h. sind die Abbildungen $f : (\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \to (\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ und $g : (\Omega_2, \mathfrak{A}_2) \to (\Omega_3, \mathfrak{A}_3)$ messbar, so ist die Abbildung $g \circ f : (\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \to (\Omega_3, \mathfrak{A}_3)$ ebenfalls messbar. ❑

---

[2] Ist $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wird $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ auch als *Zufallsvariable* bzw. als *n-dimensionale Zufallsvariable* im Fall $(\Omega', \mathfrak{A}')$=$(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n)$ bezeichnet. Zufallsvariablen werden verwirrenderweise meist mit den Großbuchstaben X, Y, Z bezeichnet.

[3] In der Wahrscheinlichkeitstheorie wird der Name Indikatorfunktion vorgezogen, da man dort unter der charakteristischen Funktion die Fourier-Transformierte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung versteht.

Beweis:

Sei $A \in \mathfrak{A}_3$ beliebig. Wegen der Messbarkeit von g ist dann $g^{-1}(A)$ ein Element von $\mathfrak{A}_2$. Aufgrund der Messbarkeit von f ist daher die Menge $f^{-1}(g^{-1}(A))$ ein Element von $\mathfrak{A}_1$. Wegen

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

ist damit die Messbarkeit von $g \circ f$ gezeigt. ■

Definition 3.6

Sei $\big((\Omega_i, \mathfrak{A}_i)\big)_{i \in I}$ eine Familie von Messräumen und $f_i : \Omega \to \Omega_i$ $(i{\in}I)$ eine Familie von Abbildungen einer Menge Ω in die einzelnen Mengen Ω_i.

$$\begin{tikzcd} & (\Omega_i, \mathfrak{A}_i) \arrow[dd, dotted, no head] \\ \Omega \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "f_j"'] & \\ & (\Omega_j, \mathfrak{A}_j) \end{tikzcd}$$

Die kleinste σ-Algebra $\mathfrak{A}$, bezüglich der alle Abbildungen $f_i : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega_i, \mathfrak{A}_i)$ messbar sind, ist offensichtlich

$$\boldsymbol{\sigma}\Big(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathfrak{A}_i)\Big).$$

Diese heißt die *von den Abbildungen* f_i und den Messräumen $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i)$ *erzeugte σ-Algebra* und man schreibt

$$\boldsymbol{\sigma}(f_i, i{\in}I).$$

❐

Bemerkung 3.7

Ist in der letzten Definition nur eine Abbildung $f_1 : \Omega \to (\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ gegeben, so gilt

$$\boldsymbol{\sigma}(f_1) = f_1^{-1}(\mathfrak{A}_1),$$

weil $f_1^{-1}(\mathfrak{A}_1)$ eine σ-Algebra ist. Ist nun $\mathfrak{A}$ eine beliebige σ-Algebra in Ω, so ist die Abbildung $f_1 : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ daher genau dann $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}_1$-messbar, wenn gilt:

$$\boldsymbol{\sigma}(f_1) \subset \mathfrak{A}.$$

❐

Satz 3.8

Sei $f_i : \Omega \to (\Omega_i, \mathfrak{A}_i)$ $(i{\in}I)$ eine Familie von Abbildungen einer Menge Ω in die Messräume $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i)$. $g : (\Omega_0, \mathfrak{A}_0) \to \Omega$ sei eine Abbildung eines Messraumes $(\Omega_0, \mathfrak{A}_0)$ in die Menge Ω. Die Abbildung g ist genau dann $\mathfrak{A}_0$-$\boldsymbol{\sigma}(f_i, i{\in}I)$-messbar, wenn alle Abbildungen $f_i \circ g$ $\mathfrak{A}_0$-$\mathfrak{A}_i$-messbar sind. ❐

Beweis:

$$\begin{tikzcd}
 & & (\Omega_i, \mathfrak{A}_i) \arrow[dd, dotted, dash] \\
(\Omega_0, \mathfrak{A}_0) \arrow[r, "g"] & \Omega \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "f_j"'] & \\
 & & (\Omega_j, \mathfrak{A}_j)
\end{tikzcd}$$

Seien zuerst alle Abbildungen $f_i \circ g : (\Omega_0, \mathfrak{A}_0) \to (\Omega_i, \mathfrak{A}_i)$ messbar. Da das Mengensystem

$$\mathfrak{E} := \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathfrak{A}_i)$$

ein Erzeugendensystem von $\boldsymbol{\sigma}(f_i; i{\in}I)$ ist, genügt es gemäß Satz 3.3 zur Überprüfung der $\mathfrak{A}_0$-$\boldsymbol{\sigma}(f_i; i{\in}I)$-Messbarkeit von S zu zeigen, dass gilt

$$g^{-1}(\mathfrak{E}) \subset \mathfrak{A}_0 \ .$$

Sei hierzu $E \in \mathfrak{E}$. Nach Definition von $\mathfrak{E}$ existieren dann ein $i{\in}I$ und ein $A_i \in \mathfrak{A}_i$ mit

$$E = f_i^{-1}(A_i).$$

Wegen der vorausgesetzten Messbarkeit von $f_i \circ g$ gilt dann jedoch

$$g^{-1}(E) = g^{-1}(f_i^{-1}(A_i)) = (f_i \circ g)^{-1}(A_i) \in \mathfrak{A}_0.$$

Sei umgekehrt g eine $\mathfrak{A}_0$-$\boldsymbol{\sigma}(f_i; i{\in}I)$-messbare Abbildung. Ist nun $k{\in}I$ beliebig, so ist nach Bemerkung 3.7 die Abbildung $f_k : (\Omega, \sigma(f_i; i{\in}I)) \to (\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$ messbar. Nach Satz 3.5 ist $f_k \circ g$ damit $\mathfrak{A}_0$-$\mathfrak{A}_k$-messbar. ■

3.2. Bildmaße

Mit Hilfe messbarer Abbildungen können - wie der nächste Satz zeigt - auch Maße auf andere Mengen transportiert werden.

Satz 3.9

Sei $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega', \mathfrak{A}')$ eine messbare Abbildung. Ist μ ein Maß auf $\mathfrak{A}$, so wird durch die Vorschrift

$$A' \longmapsto \mu(f^{-1}(A'))$$

ein Maß auf $\mathfrak{A}'$ definiert, das als *Bild von μ* oder *Bildmaß von μ unter der Abbildung f* bezeichnet wird. Man notiert es mit $f(\mu)$, d.h. es gilt

$$f(\mu)(M) = \mu\Big(f^{-1}(M)\Big)$$ ❑

Beweis:
Da bekanntlich für die Urbildmengenabbildung f^{-1}

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k\Big) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(A'_k)$$

gilt, folgt die Behauptung, da mit jeder Folge $(A'_k)_{k=1}^{\infty}$ paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{A}'$ auch $(f^{-1}(A'_k))_{k=1}^{\infty}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{A}$ ist. ■

Bemerkung 3.10

i) Wegen $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ ist die Konstruktion von Bildmaßen transitiv, d.h. das Bildmaß von μ unter $g \circ f$ ist das Bildmaß von $f(\mu)$ unter g, genauer:

$$(g \circ f)(\mu) = g(f(\mu)).$$

ii) Ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß und $X : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ eine Zufallsvariable[4], wird das Bildmaß $X(\mu)$ auch als *Verteilung* oder *Wahrscheinlichkeitsgesetz* von X bzgl. des W-maßes μ bezeichnet. Man schreibt dann oft μ_X statt $X(\mu)$. $X(\mu)$ ist dann ebenfalls ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ und $X(\mu)(M) = \mu\Big(X^{-1}(M)\Big)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Zufallsvariable X Werte in M annimmt. In Satz 2.28 wurde gezeigt, dass $X(\mu)$ als Lebesgue-Stieltjes-Maß λ_g darstellbar ist, mit der *Verteilungsfunktion* $g(x) = X(\mu)\Big(]-\infty, x[\Big) = \mu\Big(X^{-1}(]-\infty, x[)\Big)$. ❐

3.3. Eigenschaften des Lebesgue-Maßes

Beispiel 3.11

i) Sei $(\Omega, \mathfrak{A}) = (\Omega', \mathfrak{A}') = (\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n)$ der n-dimensionale Borelsche Messraum. $\mu := \lambda$ sei das zugehörige Lebesgue-Borelsche Maß. Für festes $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $T_{\boldsymbol{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Translationsabbildung, gegeben durch

$$T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}.$$

$T_{\boldsymbol{a}}$ ist stetig, also messbar und bijektiv mit $T_{\boldsymbol{a}}^{-1} = T_{-\boldsymbol{a}}$. Daher gilt für jedes Intervall $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}[\in \mathfrak{J}^n$ und das Bildmaß $\lambda'{=}T_{\boldsymbol{a}}(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
\lambda'([\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}[) &= T_{\boldsymbol{a}}(\lambda)\Big([\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}[\Big) = \lambda\Big(T_{\boldsymbol{a}}^{-1}([\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}[)\Big) = \lambda\Big(T_{-\boldsymbol{a}}([\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}[)\Big) \\
&= \lambda([\boldsymbol{b}{-}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}{-}\boldsymbol{a}[) \\
&= \lambda([\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}[)
\end{aligned}$$

Daher stimmen λ und das Bildmaß $\lambda' = T_{\boldsymbol{a}}(\lambda)$ auf $\mathfrak{J}^n$ überein, so dass nach Satz 2.21 auch $\lambda = \lambda'$ gilt. λ ist *translationsinvariant.*

[4]Zum Begriff der Zufallsvariable siehe Fußnote 2 auf Seite 47.

ii) Für jede reelle Zahl $r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und jede natürliche Zahl $p \in \{1,\ldots,n\}$ sei die lineare Abbildung $M_{p,r} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$
\begin{aligned}
M_{p,r}(x_1,\ldots,x_n) \quad &:= \quad \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \quad (x_1,\ldots,x_{p-1}, r \cdot x_p, x_{p+1},\ldots,x_n).
\end{aligned}
$$

Mit der gleichen Argumentation wie in Teil i) folgt

$$M_{p,r}(\lambda) = \frac{1}{|r|} \cdot \lambda.$$

iii) Für $\boldsymbol{a} = (a_1,\ldots,a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ mit $a_i \neq 0$ für $i = 1,\ldots,n$ definieren wir die lineare Abbildung $M_{\boldsymbol{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$M_{\boldsymbol{a}}(x_1,\ldots,x_n) := \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (a_1x_1,\ldots,a_nx_n).$$

Es gilt offensichtlich $M_{\boldsymbol{a}} = M_{1,a_1} \circ M_{2,a_2} \circ \cdots \circ M_{n,a_n}$ und daher

$$M_{\boldsymbol{a}}(\lambda) = M_{1,a_1}(M_{2,a_2}(\ldots(M_{n,a_n}(\lambda))\ldots)) = \frac{1}{|a_1 \cdots a_n|} \cdot \lambda = \frac{1}{|\det(M_{\boldsymbol{a}})|} \cdot \lambda.$$

Speziell für $\boldsymbol{a} = (r,\ldots,r)^T$ $(r \neq 0)$ wird die Abbildung $M_{\boldsymbol{a}} = r \cdot \mathrm{id}$ eine *Homothetie* genannt und mit H_r bezeichnet. Da H_r für $r = -1$ die Spiegelung am Nullpunkt ist, bedeutet dies wegen $H_{-1}(\lambda) = \lambda$ insbesondere, dass λ *spiegelungsinvariant* ist. In Satz 3.16 wird diese Invarianzeigenschaft auf Drehspiegelungen verallgemeinert.

iv) $V_{q,p} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei die lineare Abbildung, die die Variablen x_p und x_q vertauscht, d.h.

$$V_{q,p}(x_1,\ldots,x_n) := (x_1,\ldots,x_{p-1}, x_q, x_{p+1},\ldots,x_{q-1}, x_p, x_{q+1},\ldots,x_n).$$

Offensichtlich gilt $V_{q,p}(\lambda)(I) = \lambda(I)$ für alle $I \in \mathfrak{J}^n$, woraus wieder die Invarianz $V_{q,p}(\lambda) = \lambda$ folgt. ❒

Bemerkung 3.12

Zusammen mit den linearen Abbildungen $L_{p,\gamma,q} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(q, p \in \{1, \ldots, n\}, \gamma \in \mathbb{R})$,definiert durch[5]

$$L_{q,\gamma,p}(x_1, \ldots, x_n) := (x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p + \gamma \cdot x_q, x_{p+1}, \ldots, x_n)$$

spielen die in Beispiel 3.11 eingeführten Multiplikations- und Vertauschungsabbildungen $M_{\boldsymbol{a}}$ und $V_{q,p}$ eine zentrale Rolle beim Gauß-Algorithmus. Dieser zeigt[6], dass jede invertierbare lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sich mit endlich vielen Vertauschungsoperatoren und Operatoren der Form $L_{p,\gamma,q}$ in einen Multiplikationsoperator $M_{\boldsymbol{a}}$ überführen lässt, d.h. es gibt $V_{p_1,q_1}, \ldots, V_{p_k,q_k}$, $L_{\tilde{p}_1,\gamma_1,\tilde{q}_1}, \ldots, L_{\tilde{p}_k,\gamma_k,\tilde{q}_k}$ und $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ $(a_i \neq 0)$ mit

$$T \circ V_{p_1,q_1} \circ L_{\tilde{p}_1,\gamma_1,\tilde{q}_1} \circ V_{p_2,q_2} \circ L_{\tilde{p}_2,\gamma_2,\tilde{q}_2} \circ \cdots \circ V_{p_k,q_k} \circ L_{\tilde{p}_k,\gamma_k,\tilde{q}_k} = M_{\boldsymbol{a}}$$

oder äquivalent mit $\boldsymbol{b} = \left(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right)$ unter der Beachtung von $M_{\boldsymbol{a}}^{-1} = M_{\boldsymbol{b}}$:

$$T^{-1} = V_{p_1,q_1} \circ L_{\tilde{p}_1,\gamma_1,\tilde{q}_1} \circ V_{p_2,q_2} \circ L_{\tilde{p}_2,\gamma_2,\tilde{q}_2} \circ \cdots \circ V_{p_k,q_k} \circ L_{\tilde{p}_k,\gamma_k,\tilde{q}_k} \circ M_{\boldsymbol{b}}.$$

Wegen $|\det(V_{p_i,q_i})| = 1$ und $\det(L_{q_i,\gamma_i,p_i}) = 1$ folgt damit insbesondere

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\det(T)|} &= |\det(T^{-1})| = |\det(V_{p_1,q_1}) \cdot \det(L_{\tilde{p}_1,\gamma_1,\tilde{q}_1}) \cdot \cdots \cdot \det(M_{\boldsymbol{b}})| \\ &= |\det(M_{\boldsymbol{b}})| = \frac{1}{|a_1 \cdots a_n|}. \end{aligned}$$

❒

Die in Beispiel 3.11 i) festgestellte Translationsinvarianz des L-B-Maßes ist gewissermaßen einzigartig. Der folgende Satz zeigt nämlich, dass - bis auf konstante multiplikative Faktoren - das L-B-Maß das einzige translationsinvariante Maß auf $\mathfrak{B}^n$ ist.
W bezeichne im Folgenden den n-dimensionalen Einheitswürfel im $\mathbb{R}^n$, d.h. $W = [\mathbf{0}, \mathbf{1}[$ mit $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ und $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$.

Satz 3.13

Sei μ ein translationsinvariantes Maß auf den Borelmengen $\mathfrak{B}^n$, d.h. gelte $T_{\boldsymbol{a}}(\mu) = \mu$ für alle $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Ist $\alpha := \mu(W) < \infty$, so gilt

$$\mu = \alpha \cdot \lambda.$$

Insbesondere ist das L-B-Maß λ^n das einzige translationsinvariante Maß μ auf den Borelmengen $\mathfrak{B}^n$ mit $\mu(W) = 1$. ❑

Beweis:

Bezeichnet $\mathfrak{J}^n_{\text{rat}}$ die Menge aller Intervalle $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[\in \mathfrak{J}^n$, deren Randpunkte $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ nur rationale Koordinaten besitzen, so zeigen wir, dass μ und $\alpha \cdot \lambda$ auf $\mathfrak{J}^n_{\text{rat}}$ übereinstimmen. Da die Intervalle $[-\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}[$ für $m \to \infty$ isoton gegen $\mathbb{R}^n$ konvergieren (hierbei definieren wir $\boldsymbol{m} := (m, m, \ldots, m)$) können wir mit Hilfe des Eindeutigkeitssatzes 2.21 schließen, dass $\mu = \alpha \cdot \lambda$ auf $\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{J}^n_{\text{rat}}) = \mathfrak{B}^n$ gilt[7].

[5] $L_{p,\gamma,q}$ addiert das γ-fache der Variablen x_q zur Variablen x_p.

[6] Schindler, Mathematik B, Satz 6.16???

[7] $\mathfrak{J}^n_{\text{rat}}$ ist wie $\mathfrak{J}^n$ durchschnittsstabil und wie im Beweis von Satz 2.25 zeigt man, dass $\sigma(\mathfrak{J}^n_{\text{rat}}) = \mathfrak{B}^n$ gilt.

Im ersten Schritt zeigen wir hierzu, dass für $\frac{1}{\boldsymbol{m}} := \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}\right)$ gilt

$$\mu\Big([\mathbf{0}, \tfrac{1}{\boldsymbol{m}}[\Big) = \alpha \cdot \lambda([\mathbf{0}, \tfrac{1}{\boldsymbol{m}}[) \ ,$$

wobei m eine beliebige natürliche Zahl ist. Hierzu zerlegen wir den Einheitswürfel $W = [\mathbf{0}, \mathbf{1}[$ in m^n disjunkte Teilwürfel mit der Kantenlänge $\frac{1}{m}$.
Diese Darstellung resultiert daraus, dass man das 1-dimensionale Intervall $[0, 1[$ zerlegt in

$$[0,1[\; = [0, \tfrac{1}{m}[\;\cup\; [\tfrac{1}{m}, \tfrac{2}{m}[\;\cup\; \ldots \;\cup\; [\tfrac{m-1}{m}, 1[$$

und beachtet, dass gilt:

$$W = [\mathbf{0}, \mathbf{1}[\; = [0,1[\times [0,1[\times \cdots \times [0,1[.$$

Man erhält dann für W die disjunkte Zerlegung

$$W = \bigcup_{\boldsymbol{r} \in K} [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r} + \tfrac{1}{\boldsymbol{m}}[\quad \text{mit} \quad K = \{0, \tfrac{1}{m}, \tfrac{2}{m}, \ldots, \tfrac{m-1}{m}\}^n.$$

Aufgrund der Additivität von μ folgt:

$$\mu(W) = \alpha = \sum_{\boldsymbol{r} \in K} \mu\Big([\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r} + \tfrac{1}{\boldsymbol{m}}[\Big) = \sum_{\boldsymbol{r} \in K} \mu\Big(T_{\boldsymbol{r}}([0, \tfrac{1}{\boldsymbol{m}}[)\Big).$$

Wegen der Translationsinvarianz von μ folgt wegen $|K| = m^n$ weiter

$$\alpha = \sum_{\boldsymbol{r} \in K} \mu\Big([0, \tfrac{1}{\boldsymbol{m}}[\Big) = m^n \cdot \mu\Big([0, \tfrac{1}{\boldsymbol{m}}[\Big),$$

also

$$\mu\Big([0, \tfrac{1}{\boldsymbol{m}}[\Big) = \alpha \cdot \tfrac{1}{m^n} = \alpha \cdot \lambda\Big([0, \tfrac{1}{\boldsymbol{m}}[\Big).$$

Als nächstes zeigen wir, dass die entsprechende Aussage, d.h.

$$\mu([\mathbf{0}, \boldsymbol{b}[) = \alpha \cdot \lambda([\mathbf{0}, \boldsymbol{b}[).$$

für jedes $\mathbf{0} < \boldsymbol{b} \in \mathbb{Q}^n$ gilt. Hierzu beachte man, dass für jedes $\mathbf{0} < \boldsymbol{b} \in \mathbb{Q}^n$ durch Übergang zum Hauptnenner ein $m \in \mathbb{N}$ gewählt werden kann, so dass für geeignete $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\boldsymbol{b} = \left(\tfrac{k_1}{m}, \tfrac{k_2}{m}, \ldots, \tfrac{k_n}{m}\right).$$

Es ist daher

$$[\mathbf{0}, \boldsymbol{b}[\; = [0, \tfrac{k_1}{m}[\times [0, \tfrac{k_2}{m}[\times \cdots \times [0, \tfrac{k_n}{m}[.$$

Zerlegt man nun wie vorher jedes 1-dimensionale Intervall $[0, \frac{k_i}{m}[$ in k_i disjunkte Teilintervalle, d.h. setzt man für $i = 1, \ldots, n$

$$[0, \tfrac{k_i}{m}[\; = [0, \tfrac{1}{m}[\;\cup\; [\tfrac{1}{m}, \tfrac{2}{m}[\;\cup\; \ldots \;\cup\; [\tfrac{k_i - 1}{m}, \tfrac{k_i}{m}[\ ,$$

erhält man für das n-dimensionale Intervall $[\mathbf{0},\boldsymbol{b}[$ die Zerlegung

$$[\mathbf{0},\boldsymbol{b}[\,=\bigcup_{\boldsymbol{r}\in K}[\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}+\tfrac{1}{\boldsymbol{m}}[\quad \text{mit} \quad K=\{0,1,\ldots,k_1-1\}\times\cdots\times\{0,1,\ldots,k_n-1\}.$$

Die Additivität und Translationsinvarianz von μ ergibt dann wegen $|K|=k_1\cdot k_2\cdots k_n$

$$\begin{aligned}
\mu([\mathbf{0},\boldsymbol{b}[) &= \sum_{\boldsymbol{r}\in K}\mu\Big([\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}+\tfrac{1}{\boldsymbol{m}}[\Big)\\
&= \sum_{\boldsymbol{r}\in K}\mu\Big(T_{\boldsymbol{r}}([\boldsymbol{r},\tfrac{1}{\boldsymbol{m}}[)\Big)\\
&= \sum_{\boldsymbol{r}\in K}\mu\Big([\mathbf{0},\tfrac{1}{\boldsymbol{m}}[\Big)\\
&= \sum_{\boldsymbol{r}\in K}\alpha\cdot\lambda\Big([\mathbf{0},\tfrac{1}{\boldsymbol{m}}[\Big) \;=\; \alpha\cdot\tfrac{k_1\cdot k_2\cdots k_n}{m^n}\\
&= \alpha\cdot\lambda([\mathbf{0},\boldsymbol{b}[).
\end{aligned}$$

Sind schließlich $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{Q}^n$ mit $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$, so folgt aus der Translationsinvarianz von μ und λ

$$\mu([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}[)=\mu([\mathbf{0},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}[)=\alpha\cdot\lambda([\mathbf{0},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}[)=\alpha\cdot\lambda([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}[).$$ ■

Bemerkung 3.14

Die Aussagen von Satz 3.13 bleiben gültig, wenn man den zur Normierung benötigten Einheitswürfel W gleich $[\mathbf{0},\mathbf{1}[$, $]\mathbf{0},\mathbf{1}]$, $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ bzw. $]\mathbf{0},\mathbf{1}[$ setzt. Dies folgt aus der in Beispiel 2.27 iii) hergeleiteten Gleichheit

$$\lambda([\mathbf{0},\mathbf{1}[)=\lambda(]\mathbf{0},\mathbf{1}])=\lambda([\mathbf{0},\mathbf{1}])=\lambda(]\mathbf{0},\mathbf{1}[).$$

Um weitere Invarianzeigenschaften des L-B-Maßes herzuleiten, betrachten wir im Folgenden Abbildungen, die die Kongruenz in der klassischen Geometrie beschreiben. ❐

Definition 3.15

Punktmengen, die durch Isometrien ineinander überführt werden, heißen *kongruent*. Eine *Isometrie* (*Bewegung*) des $\mathbb{R}^n$ ist dabei eine Abbildung $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, mit der Eigenschaft[8]

$$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n:\|T(\boldsymbol{x})-T(\boldsymbol{y})\|=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$$ ❐

Bemerkung 3.16

i) Isometrische Abbildungen sind winkeltreu, d.h. der Winkel zwischen zwei Halbgeraden mit gleichen Anfangspunkten bleibt erhalten.

ii) Jede Isometrie ist darstellbar als Komposition einer orthogonalen linearen Abbildung (geometrisch eine Drehung oder Drehspiegelung) und einer Translation. ❐

[8] $\|.\|$ bezeichnet hierbei die euklidische Norm des $\mathbb{R}^n$.

Satz 3.17
Das L-B-Maß ist bewegungsinvariant, d.h. für jede Bewegung T und Borelmenge A gilt:

$$\lambda(T(A)) = \lambda(A) \iff \lambda = T^{-1}(\lambda).$$ ❑

Beweis:
Wir betrachten zunächst eine Bewegung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, d.h. T ist nach Bemerkung 3.16 ii) eine rein orthogonale lineare Abbildung. Wir zeigen, dass $T(\lambda)$ in diesem Fall ein translationsinvariantes Maß ist. Ist nämlich $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, so gilt für $\boldsymbol{b} = T^{-1}(\boldsymbol{a})$:

$$T_{\boldsymbol{a}} \circ T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{a} = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{b}) = T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}) = T \circ T_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}),$$

d.h. es ist :

$$T_{\boldsymbol{a}} \circ T = T \circ T_{\boldsymbol{b}}.$$

Da das L-B-Maß translationsinvariant ist, folgt

$$T_{\boldsymbol{a}}(T(\lambda)) = T(T_{\boldsymbol{b}}(\lambda)) = T(\lambda).$$

Damit ist $\mu := T(\lambda)$ ein translationsinvariantes Maß. Da T und T^{-1} stetig sind, ist $T^{-1}(W)$ eine beschränkte Menge (W = Einheitswürfel), also mit endlichem L-B-Maß:

$$\infty > \lambda(T^{-1}(W)) = T(\lambda(W)) = \mu(W).$$

Nach Satz 3.13 gilt also $T(\lambda) = \mu = \alpha \cdot \lambda$ und es bleibt daher $\alpha = 1$ zu zeigen.
Wir betrachten hierzu die abgeschlossene Einheitskugel K mit Mittelpunkt $\mathbf{0}$. Da mit T auch T^{-1} eine Isometrie ist, gilt

$$T^{-1}(K) = K.$$

Aus $T(\lambda) = \alpha \cdot \lambda$ folgt somit

$$\lambda(K) = \lambda(T^{-1}(K)) = T(\lambda)(K) = \alpha \cdot \lambda(K).$$

Nun gilt $\lambda(K) < \infty$ und wegen $[-\boldsymbol{n}^{-\frac{1}{2}}, \boldsymbol{n}^{-\frac{1}{2}}[\ \subset K$ - mit der Bezeichnung $\boldsymbol{n}^{-\frac{1}{2}} := (n^{-\frac{1}{2}}, n^{-\frac{1}{2}}, \dots, n^{-\frac{1}{2}}) \in \mathbb{R}^n$ - auch $\lambda(K) \neq 0$, woraus $\alpha = 1$ folgt.
Betrachtet man nun den Fall einer beliebigen Bewegung T und setzt $\boldsymbol{c} := T(\mathbf{0})$, so ist $S := T_{-\boldsymbol{c}} \circ T$ eine Bewegung mit $S(\mathbf{0}) = 0$. Für diese gilt - wie gerade bewiesen - $S(\lambda) = \lambda$. Damit folgt $T = T_{\boldsymbol{c}} \circ S$ und daher

$$T(\lambda) = (T_{\boldsymbol{c}} \circ S)(\lambda) = T_{\boldsymbol{c}}(S(\lambda)) = T_{\boldsymbol{c}}(\lambda) = \lambda.$$

Da mit jeder Bewegung des $\mathbb{R}^n$ auch T^{-1} eine Bewegung ist, gilt $T^{-1}(\lambda) = \lambda$, d.h.

$$\forall A \in \mathfrak{B}^n : \lambda(T(A)) = \lambda\Big((T^{-1})^{-1}(A)\Big) = T^{-1}(\lambda)(A) = \lambda(A).$$ ∎

Bemerkung 3.18

In der Form $\lambda(T(A)) = \lambda(A)$ besagt Satz 3.17 nichts anderes, als dass je zwei kongruente Borelsche Mengen im $\mathbb{R}^n$ dasselbe n-dimensionale Lebesguesche Maß besitzen. Dies ist die maßtheoretische Fassung des in der Einleitung formulierten elementargeometrischen Kongruenzprinzips. Das L-B-Maß ist damit als Begriff der euklidischen Geometrie erkannt. ❒

Beispiel 3.19

i) Jede Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$ ist eine L-B-Nullmenge. Dies ergibt sich aus Beispiel 2.27 i), da zu H eine Bewegung existiert, die H in eine zu einer Koordinatenachse des $\mathbb{R}^n$ orthogonalen Hyperebene überführt.

ii) Jeder abgeschlossene oder offene Quader $Q \in \mathbb{R}^n$ mit den Kantenlängen $\ell_1, \ldots, \ell_n$ hat das Lebesguesche Maß $\ell_1 \cdot \ell_2 \cdots \ell_n$. Dies ergibt sich daraus, dass jeder solche Quader durch eine Bewegung in ein Intervall der Form $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$, $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ oder $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ überführen lässt und wenn man Beispiel 2.27 ii) betrachtet. ❒

Die in 3.17 verwendete Beweismethode lässt sich durch eine Modifikation auf beliebige lineare Abbildungen $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ übertragen.

Satz 3.20

Für jede bijektive lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und jede Borelsche Menge $A \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\lambda(T(A)) = |\det(T)| \cdot \lambda(A)$$

oder äquivalent

$$T(\lambda) = \frac{1}{|\det(T)|} \cdot \lambda.$$

Speziell ist λ invariant gegenüber allen linearen Abbildungen T mit $|\det(T)| = 1$. ❑

Beweis:

Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine beliebige invertierbare lineare Abbildung. Wie im Beweis von Satz 3.16 zeigt man, dass für alle $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{b} := T^{-1}(\boldsymbol{a})$

$$T_{\boldsymbol{a}} \circ T = T \circ T_{\boldsymbol{b}}$$

gilt, woraus sich

$$T_{\boldsymbol{a}}(T(\lambda)) = T(\lambda)$$

ergibt. Damit ist $T(\lambda)$ ein translationsinvariantes Maß auf den Borelmengen. Wegen der Stetigkeit von T^{-1} ist $T^{-1}(W)$ eine nichtleere, offene und beschränkte (Borel-)menge, die damit ein Intervall $I \neq \emptyset$ enthält. Es gilt daher

$$0 < f(T) := T(\lambda)(W) = \lambda(T^{-1}(W)) < +\infty$$

Nach Satz 3.13 folgt

$$T(\lambda) = f(T) \cdot \lambda.$$

Wir zeigen nun, dass $f(S \circ T) = f(S) \cdot f(T)$ und damit insbesondere $f(T^{-1}) = f(T)^{-1}$ gilt. Seien hierzu $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zwei bijektive lineare Abbildungen. Setzt man nun

$$s := f(S)^{-\frac{1}{n}}, \qquad t := f(T)^{-\frac{1}{n}}$$

und betrachtet die Homothetien H_s und H_t(siehe Beispiel 3.11 iii), so gilt (wegen $H_t = t \cdot \mathbb{1}$)

$$S \circ H_t = H_t \circ S$$

sowie

$$H_t \circ H_s = H_{ts}$$

Wegen $H_t(\lambda) = t^{-n} \cdot \lambda$ folgt damit:

$$\begin{aligned} f(S \circ T) \cdot \lambda &= (S \circ T)(\lambda) = S(T(\lambda)) = S(f(T) \cdot \lambda) = S(t^{-n} \cdot \lambda) \\ &= S(H_t)(\lambda) = (S \circ H_t)(\lambda) = (H_t \circ S)(\lambda) \\ &= H_t((S(\lambda)) = H_t(s^{-n} \cdot \lambda) = H_t(H_s(\lambda)) \\ &= (H_t \circ H_s)(\lambda) = H_{st}(\lambda) \\ &= (st)^{-n}\lambda = f(S) \cdot f(T) \cdot \lambda. \end{aligned}$$

Aus $\lambda(W) = 1$ folgt damit

$$f(S \circ T) = f(S) \cdot f(T).$$

Im nächsten Schritt berechnen wir $f(L_{q,\gamma,p})$ für die in Bemerkung 3.12 eingeführte lineare Abbildung

$$L_{q,\gamma,p}(x_1, \ldots, x_n) := (x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p + \gamma \cdot x_q, x_{p+1}, \ldots, x_n).$$

Mit der Multiplikationsabbildung $M_{q,\alpha}$ (siehe Beispiel 3.11 ii) gilt für alle $\alpha \neq 0$ die leicht einzusehende Relation

$$L_{q,\alpha,p} = M_{q,\alpha^{-1}} \circ L_{q,1,p} \circ M_{q,\alpha}.$$

Wegen $M_{q,\alpha} = \frac{1}{|\alpha|} \cdot \lambda$, d.h. $f(M_{q,\alpha}) = \frac{1}{|\alpha|}$ folgt daraus für alle $\alpha \neq 0$

$$\begin{aligned} f(L_{q,\alpha,p}) &= f(M_{q,\alpha^{-1}}) \cdot f(L_{q,1,p}) \cdot f(M_{q,\alpha}) \\ &= |\alpha| \cdot f(L_{q,1,p}) \cdot \frac{1}{|\alpha|} \\ &= f(L_{q,1,p}) \end{aligned}$$

Wegen $\mathbb{1} = L_{q,\alpha,p} \circ L_{q,-\alpha,p}$ und $f(\mathbb{1}) = 1$ folgt damit für $\alpha \neq 0$

$$\begin{aligned} 1 &= f(\mathbb{1}) = f(L_{q,\alpha,p}) \cdot f(L_{q,-\alpha,p}) \\ &= f(L_{q,1,p}) \cdot f(L_{q,1,p}), \end{aligned}$$

woraus sich wegen $f(L_{q,1,p}) > 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ergibt:

$$1 = f(L_{q,1,p}) = f(L_{q,\alpha,p}).$$

Wegen $L_{q,0,p} = \mathbb{1}$ gilt $f(L_{q,\alpha,p}) = 1$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimmt man nun - wie in Bemerkung 3.12 gesehen - geeignet gewählte $p_i, q_i, \gamma_i, \tilde{p}_i, \tilde{q}_i$ mit

$$T \circ V_{p_1,q_1} \circ L_{\tilde{q}_1,\gamma_1,\tilde{p}_1} \circ \cdots \circ L_{\tilde{q}_k,\gamma_k,\tilde{p}_k} = M_{\boldsymbol{a}},$$

so folgt wegen $f(V_{p_i,q_i}) = f(L_{\tilde{q}_i,\gamma_i,\tilde{p}_i}) = 1$ und $f(T \circ S) = f(T) \cdot f(S)$

$$f(T) \cdot 1 \ldots 1 = f(M_{\boldsymbol{a}}).$$

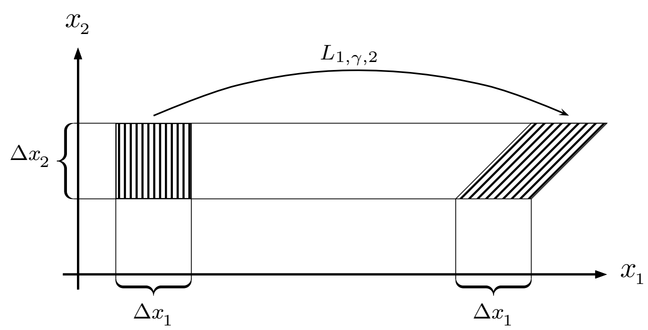
Nach Beispiel 3.11 iii) ist jedoch $f(M_{\boldsymbol{a}}) = \dfrac{1}{|\det(M_{\boldsymbol{a}})|}$ und - da nach Bemerkung 3.12 außerdem $|\det(M_{\boldsymbol{a}})| = |\det(T)|$ gilt, erhält man damit

$$f(T) = f(M_{\boldsymbol{a}}) = \frac{1}{|\det(M_{\boldsymbol{a}})|} = \frac{1}{|\det(T)|}.$$

■

Bemerkung 3.21

i) Der Beweis von Satz 3.20 zeigt insbesondere, dass $\lambda\Big(L_{p,\gamma,q}([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}[)\Big) = \lambda([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}[)$ gilt. Da geometrisch gesehen $L_{p,\gamma,q}$ zu einer Scherung des Intervalls in Richtung der x_p-Achse führt (siehe zweidimensionale Graphik), erweist sich dies als bekanntes Flächeninvarianzproblem aus der Elementargeometrie.



ii) Es liegt nahe, Satz 3.20 auf beliebige, also auch nichtinvertierbare lineare Abbildungen T auszudehnen, da $\text{Bild}(T) = T(\mathbb{R}^n)$ im Falle der Nichtinvertierbarkeit maximal die Dimension $n-1$ hat, also eine Hyperebene des $\mathbb{R}^n$ ist. (Vergleiche Schindler, Mathematik B, Satz 3.11) und diese nach Beispiel 3.19 das Maß 0 haben. Dies scheitert daran, dass schon bei elementaren linearen Abbildungen T im allgemeinen Borelmengen A *nicht* auf Borelmengen abgebildet werden und daher die Gleichung $\lambda(T(A)) = |\det(T)| \cdot \lambda(A) = 0 \cdot \lambda(A) = 0$ keinen Sinn ergibt, wenn $T(A)$ keine Borelmenge ist. Im Falle der Invertierbarkeit von T wird dies durch die Stetigkeit von T^{-1} garantiert $(T(A) = (T^{-1})^{-1}(A))$.

Satz 3.20 gilt jedoch für alle linearen Abbildungen T, wenn man zum Lebesgue-Maß, d.h. zur Vervollständigung des L-B-Maßes übergeht, da in diesem Fall Teilmengen von λ-Nullmengen (nämlich der Hyperebene $T(\mathbb{R}^n)$) automatisch wieder messbare λ-Nullmengen sind.

iii) Sind Ω und Ω' offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und $\varphi : \Omega \to \Omega'$ eine 1-mal stetig differenzierbare Abbildung mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung φ^{-1} (kurz: φ ist ein *Diffeomorphismus*), so lässt sich nach der klassischen Differentialrechnung φ in jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ durch die lineare Abbildung (bzw. Matrix) $\varphi'(x_0)$ approximieren. Es ist daher nicht weiter verwunderlich, dass man folgendes Transformationsverhalten für das L-B-Maß beweisen kann[9]:

$$\varphi(\lambda_\Omega) = \frac{1}{|\det(\varphi')|} \cdot \lambda_{\Omega'}$$

oder äquivalent

$$\varphi^{-1}(\lambda_{\Omega'}) = |\det(\varphi')| \cdot \lambda_\Omega.$$ ❒

Zum Abschluss dieses Kapitels soll noch die Frage beantwortet werden, ob die σ-Algebra der Borelmengen mit der Potenzmenge $\wp(\mathbb{R}^n)$ übereinstimmt.

Satz 3.22

Für alle natürlichen Zahlen n gilt $\mathfrak{B}^n \neq \wp(\mathbb{R}^n)$ ❑

Beweis:

Wir definieren auf $\mathbb{R}^n$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \;:\Longleftrightarrow\; \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathbb{Q}^n.$$

Wie bei jeder Äquivalenzrelation wird hierdurch $\mathbb{R}^n$ in ein disjunktes System von Äquivalenzklassen zerlegt. Bezeichnen wir für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $[\boldsymbol{x}]$ die Äquivalenzklasse, zu der $\boldsymbol{x}$ gehört, so gilt

$$[\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{x} + \mathbb{Q}^n = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{q} \in \mathbb{Q}^n\}$$

und zwei Äquivalenzklassen $[\boldsymbol{x}]$ und $[\boldsymbol{y}]$ sind genau dann disjunkt, wenn $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ nicht äquivalent sind. Außerdem gilt aufgrund der Transitivitätseigenschaft von Äquivalenzrelationen:

$$[\boldsymbol{x}] = [\boldsymbol{y}] \iff [\boldsymbol{x}] \cap [\boldsymbol{y}] \neq \emptyset \iff \boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}.$$

Insbesondere gilt:

$$\boldsymbol{z} \in [\boldsymbol{x}] \iff [\boldsymbol{z}] = [\boldsymbol{x}].$$

Da zu jeder reellen Zahl x eine rationale Zahl q existiert mit $x+q \in [0,1[$, liegt in jeder Äquivalenzklasse $[\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{x} + \mathbb{Q}^n$ ein Punkt $\boldsymbol{z} \in [\mathbf{0},\mathbf{1}[$. Daher kann *jede* Äquivalenzklasse in der Form $[\boldsymbol{z}]$ mit $\boldsymbol{z} \in [\mathbf{0},\mathbf{1}[$ dargestellt werden. Insbesondere kann eine Menge $K \subset [\mathbf{0},\mathbf{1}[$

[9] siehe Rudin, Principles of Mathematical Analysis, Theorem 10.9

gewählt werden, deren Elemente alle Äquivalenzklassen liefern, wobei jede Äquivalenzklasse genau einmal auftritt. Die Menge K besteht also aus paarweise nicht äquivalenten Elementen, so dass die Menge K mit jeder Äquivalenzklasse genau einen Schnittpunkt hat. Es gilt dann wegen den Eigenschaften von K

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{\boldsymbol{k}\in K} [\boldsymbol{k}] = \bigcup_{\boldsymbol{k}\in K} (\boldsymbol{k}+\mathbb{Q}^n) = \bigcup_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{Q}^n} (K+\boldsymbol{q}). \tag{3.1}$$

Außerdem gilt

$$\forall \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2 \in \mathbb{Q}^n : \boldsymbol{q}_1 \neq \boldsymbol{q}_2 \Longrightarrow (\boldsymbol{q}_1+K) \cap (\boldsymbol{q}_2+K) = \emptyset,$$

denn aus $\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{k} = \boldsymbol{q}_2+\boldsymbol{k}'$ $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'\in K)$ würde $\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{q}_1 \in \mathbb{Q}^n$ folgen, d.h. $\boldsymbol{k} \sim \boldsymbol{k}'$ und somit $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}'$ im Widerspruch zu $\boldsymbol{q}_1 \neq \boldsymbol{q}_2$.
Wir zeigen nun, dass K *nicht* borelmessbar ist.
Wäre K eine Borelmenge, so würde aufgrund der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}^n$, der σ-Additivität von λ, Gleichung (3.1) und der Disjunktheit der Mengen $\boldsymbol{q}+K$:

$$+\infty = \lambda(\mathbb{R}^n) \;=\; \sum_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{Q}^n} \lambda(\boldsymbol{q}+K).$$

Wegen der Translationsinvarianz von λ gilt $\lambda(\boldsymbol{q}+K) = \lambda(K)$, also

$$+\infty \;=\; \sum_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{Q}^n} \lambda(K),$$

woraus $\lambda(K) > 0$ folgt.
Wegen $K \subset [\mathbf{0}, \mathbf{1}[$ gilt andererseits $\boldsymbol{y}+K \subset [\mathbf{0}, \mathbf{2}[$ für alle $\boldsymbol{y} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}[$ und damit

$$\bigcup_{\boldsymbol{y}\in[\mathbf{0},\mathbf{1}[\cap\mathbb{Q}^n} (\boldsymbol{y}+K) \subset [\mathbf{0}, \mathbf{2}[.$$

Die σ-Additivität von λ und die Disjunktheit der Mengen $\boldsymbol{y}+K$ liefert dann

$$\sum_{\boldsymbol{y}\in[\mathbf{0},\mathbf{1}[\cap\mathbb{Q}^n} \lambda(\boldsymbol{y}+K) \;\leqslant\; \lambda([\mathbf{0}, \mathbf{2}[) = 2^n < \infty$$

Aus $\lambda(\boldsymbol{y}+K) = \lambda(K)$ folgt dann

$$\sum_{\boldsymbol{y}\in[\mathbf{0},\mathbf{1}[\cap\mathbb{Q}^n} \lambda(K) \;\leqslant\; 2^n$$

Da eine unendliche Summe über eine konstante Größe nur endlich sein kann, wenn diese Konstante gleich Null ist, folgt

$$\lambda(K) = 0,$$

im Widerspruch zum vorher gezeigten $\lambda(K) > 0$. K kann daher keine Borelsche Menge sein. ■

4. Integrationstheorie

Im Folgenden sei ein beliebiger Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ fest vorgegeben. Wir stellen uns nun die Aufgabe, einer möglichst großen Zahl numerischer Funktionen auf Ω ein Integral zuzuordnen. Die Vorgehensweise folgt dabei analog der Vervollständigung eines Elementarinhalts zu einem Maß, wie z.B. beim Lebesgue-Borel-Maß.
Man gibt sich zunächst das Integral von Elementarfunktionen vor (diese entsprechen den Rechtecken beim Inhalts- bzw. Maßbegriff) und über eine geeignete Supremumsbildung erweitert man dieses Elementarintegral auf eine möglichst große Menge von Funktionen. Dieser Übergang vom Riemann- zum Lebesgue-Integral ist von der gleichen fundamentalen Bedeutung wie der Übergang von den rationalen zu den reellen Zahlen.
Ausgangspunkt für die allgemeine Integraldefinition ist, dass sich Mengen A und ihre Indikatorfunktionen $\mathbb{1}_A$ umkehrbar eindeutig entsprechen, so dass man das Integral der Indikatorfunktion $\mathbb{1}_A$ als $\mu(A)$ definieren wird. Im nächsten Schritt wird dann diese Definition auf Stufenfunktionen, d.h. auf Linearkombinationen solcher Indikatorfunktionen ausgedehnt, also auf Funktionen der Form

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i} \qquad (A_1, \ldots, A_m \text{ paarweise disjunkt}).$$

Da in diesem Kapitel die messbaren numerischen Funktionen im Vordergrund stehen (siehe hierzu Definition 3.1), sollen zunächst ihre wesentlichen Eigenschaften behandelt werden.

4.1. Messbare numerische Funktionen

Kompaktifiziert man $\mathbb{R}$ durch Hinzunahme der „idealen“ Punkte $+\infty$ und $-\infty$ zur Menge $\mathbb{R}^\star$, so nennt man diejenigen Mengen $A \subset \mathbb{R}^\star$ *Borelsch* in $\mathbb{R}^\star$, welche $A \cap \mathbb{R} \in \mathfrak{B}$ erfüllen. Dies sind also genau die Mengen $B, B \cup \{+\infty\}, B \cup \{-\infty\}, B \cup \{-\infty, +\infty\}$ mit $B \in \mathfrak{B}$. Das System $\mathfrak{B}^\star$ dieser Mengen ist daher eine σ-Algebra mit $\mathfrak{B}$ als Spur in $\mathbb{R}$, d.h. es gilt

$$\mathbb{R} \cap \mathfrak{B}^\star = \mathfrak{B}.$$

Ist $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Messraum, so wird eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}^\star$-messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^\star$ als *messbare numerische Funktion* (siehe Definition 3.1) bezeichnet. $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Omega, \mathfrak{A})$ bzw. $\mathfrak{M}^+ = \mathfrak{M}^+(\Omega, \mathfrak{A})$ bezeichne die Menge aller bzw. aller nichtnegativen messbaren numerischen Funktionen.

Definition 4.1
Sind f, g numerische Funktionen auf Ω, so verwenden wir folgende abkürzende Schreibweisen

$$\{f \leqslant g\} := \{\omega{\in}\Omega \mid f(\omega) \leqslant g(\omega)\}.$$

Die Mengen $\{f < g\}, \{f > g\}, \{f \geqslant g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\}$ usw. sind analog definiert. Ist speziell g konstant $\alpha{\in}\overline{\mathbb{R}}$, erhält man Mengen der Form $\{f \leqslant \alpha\}, \{f > \alpha\}, \{f \neq \alpha\}$. ❐

Satz 4.2
a) Eine numerische Funktion f auf Ω ist genau dann $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}^\star$-messbar, wenn eine der folgenden vier äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:
   i) $\forall\alpha \in \mathbb{R} : \{f \geqslant \alpha\} \in \mathfrak{A}$
   ii) $\forall\alpha \in \mathbb{R} : \{f > \alpha\} \in \mathfrak{A}$
   iii) $\forall\alpha \in \mathbb{R} : \{f \leqslant \alpha\} \in \mathfrak{A}$
   iv) $\forall\alpha \in \mathbb{R} : \{f < \alpha\} \in \mathfrak{A}$

b) Für zwei $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}^\star$-messbare Funktionen $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ liegen die Mengen $\{f{<}g\}, \{f{\leqslant}g\}, \{f{=}g\}$ und $\{f{\neq}g\}$ in $\mathfrak{A}$. ❐

Beweis:
a) Wir beweisen zunächst, dass f genau dann $\mathfrak{A}$-messbar ist, wenn $\{f{\geqslant}\alpha\} \in \mathfrak{A}$ für alle $\alpha{\in}\mathbb{R}$ gilt. Im zweiten Schritt zeigen wir dann die Äquivalenz der Aussagen i) - iv).

   Zum Beweis des ersten Schrittes zeigen wir, dass das System $\mathfrak{E}^\star := \{[\alpha, +\infty] \mid \alpha{\in}\mathbb{R}\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{B}^\star$ ist. Da offensichtlich $\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{E}^\star) \subset \mathfrak{B}^\star$ gilt, ist nur die umgekehrte Teilmengenbeziehung zu zeigen.

   Wegen $[\alpha, \beta[= [\alpha, +\infty] \backslash [\beta, +\infty]$ gilt für die Menge $\mathfrak{J}^1$ der Intervalle

$$\mathfrak{J}^1 \subset \mathbb{R} \cap \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{E}^\star)$$

   und da $\mathbb{R} \cap \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{E}^\star)$ eine σ-Algebra ist (siehe Beispiel 1.3 iii)), folgt

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{J}^1) = \mathfrak{B} \subset \mathbb{R} \cap \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{E}^\star).$$

   Die einpunktigen Mengen

$$\{+\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} [k, +\infty] \quad \text{und} \quad \{-\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \complement[-k, +\infty]$$

   liegen ebenfalls in $\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{E}^\star)$. Mit jeder Menge $Q \in \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{E}^\star)$ liegt damit auch die Menge $Q \backslash \{+\infty, -\infty\} = \mathbb{R} \cap Q$ in $\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{E}^\star)$, d.h. es gilt

$$\mathbb{R} \cap \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{E}^\star) \subset \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{E}^\star).$$

Wegen $\{+\infty\} \in \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{E}^\star)$ und $\{-\infty\} \in \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{E}^\star)$ gilt damit

$$\mathfrak{B} \cup \{\{-\infty\}, \{+\infty\}\} \subset \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{E}^\star) \subset \mathfrak{B}^\star$$

und folglich

$$\mathfrak{B}^\star = \sigma(\mathfrak{B} \cup \{\{-\infty\}, \{+\infty\}\}) \subset \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{E}^\star) \subset \mathfrak{B}^\star,$$

also

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{E}^\star) = \mathfrak{B}^\star.$$

Da $\mathfrak{E}^\star$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{B}^\star$ darstellt, ist nach Satz 3.3 die Messbarkeit von f äquivalent zur Aussage

$$\forall E \in \mathfrak{E}^\star : f^{-1}(E) \in \mathfrak{A}.$$

Da jedes $E \in \mathfrak{E}^\star$ von der Form $[\alpha, +\infty]$ ist und außerdem gilt

$$f^{-1}([\alpha, +\infty]) = \{\omega{\in}\Omega \mid f(\omega) \geqslant \alpha\} = \{f \geqslant \alpha\},$$

ist damit die Äquivalenz der Messbarkeit und Aussage i) bewiesen.

Die Äquivalenz der Aussagen i) - iv) folgt nun aus den vier Mengenbeziehungen:

1) $\{f > \alpha\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{f \geqslant \alpha{+}\frac{1}{k}\}$
2) $\{f \leqslant \alpha\} = \complement\{f > a\}$
3) $\{f < \alpha\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{f \leqslant \alpha{-}\frac{1}{k}\}$
4) $\{f \geqslant \alpha\} = \complement\{f < \alpha\}$

b) Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, ergibt sich die $\mathfrak{A}$-Messbarkeit der Mengen $\{f{<}g\}, \{f{\leqslant}g\}, \{f{=}g\}$ und $\{f{\neq}g\}$ aus Teil a) dieses Satzes und folgenden vier Beziehungen:

1) $\{f{<}g\} = \bigcup\limits_{q\in\mathbb{Q}} \{f{<}q\} \cap \{q{<}g\}$
2) $\{f{\leqslant}g\} = \complement\{f{>}g\} = \complement\{g{<}f\}$
3) $\{f{=}g\} = \{f{\leqslant}g\} \cap \{g{\leqslant}f\}$
4) $\{f{\neq}g\} = \complement\{f{=}g\}$ ■

Bemerkung 4.3

In Satz 4.2 kann äquivalent auch $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ gefordert werden. ❐

Satz 4.4

a) Sei $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Folge $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}^\star$-messbarer Funktionen auf Ω. Dann ist jede der folgenden Funktionen[1] $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}^\star$-messbar:

i) $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ ii) $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ iii) $\limsup\limits_{k\to\infty} f_k$ iv) $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k$

Konvergiert die Folge $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ punktweise auf Ω, so ist insbesondere auch die Funktion $\lim\limits_{k\to\infty} f_k$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}^\star$-messbare Funktion.

b) Sind die Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}^\star$-messbar, so auch das *Maximum* $f_1 \vee \cdots \vee f_k$ (*obere Einhüllende*) und das *Minimum* $f_1 \wedge \cdots \wedge f_k$ (*untere Einhüllende*) messbar.

c) $f : \Omega \to \mathbb{R}^\star$ ist genau dann $\mathfrak{A}$-messbar, wenn sowohl ihr *Positivteil* $f^+ := f \vee 0$ als auch ihr *Negativteil* $f^- := (-f)^+$ $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}^\star$-messbar ist. Ferner folgt aus der $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}^\star$-Messbarkeit von f stets die $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}^\star$-Messbarkeit des *Absolutbetrages* $|f| := f \vee (-f)$.

d) Sind $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^\star$ zwei $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}^\star$-messbare Funktionen, so gilt

i) $f + g$ ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}^\star$-messbar (sofern überall auf Ω definiert)

ii) $f - g$ ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}^\star$-messbar (sofern überall auf Ω definiert)

iii) $f \cdot g$ ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}^\star$-messbar (mit der Konvention $0 \cdot \infty := 0$)

Insbesondere ist $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ (sofern überall auf Ω definiert) $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}^\star$-messbar. ❑

Beweis:

a) i) $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ ist messbar, weil

$$\{\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k \leqslant \alpha\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f_k \leqslant \alpha\}$$

gilt und weil nach Satz 4.2 a) jede der Mengen $\{f_k \leqslant \alpha\}$ in $\mathfrak{A}$ liegt.

ii) Wegen $-f \leqslant \alpha \iff f \geqslant -\alpha$ sind die Funktionen $-f_k$ messbar und damit auch die Funktionen $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k = -\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}(-f_k)$.

iii) iv) Wegen

$$\limsup_{k\to\infty} f_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{m\geqslant k} f_m \quad \text{und} \quad \liminf_{k\to\infty} f_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{m\geqslant k} f_m$$

sind auch $\limsup\limits_{k\to\infty} f_k$ und $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k$ messbar.

Konvergiert die Funktionenfolge f_k punktweise, gilt

$$\lim_{k\to\infty} f_k = \limsup_{k\to\infty} f_k = \liminf_{k\to\infty} f_k,$$

woraus insbesondere die Messbarkeit von $\lim\limits_{k\to\infty} f_k$ folgt.

[1] Die Funktionen sind dabei punktweise definiert, also z.B. $\left(\limsup\limits_{k\to\infty} f_k\right)(x) = \limsup\limits_{k\to\infty} f_k(x)$.

b) Betrachtet man die Folge $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_k, f_k, f_k, \ldots,$ so ist das Supremum bzw. Infimum dieser Folge gerade die Funktion $f_1 \vee \cdots \vee f_k$ bzw. $f_1 \wedge \cdots \wedge f_k$, die damit nach Teil a) messbar sind.

d) Mit g ist für alle reellen Zahlen r, s auch die Funktion $r + s{\cdot}g$ messbar. Für $s{=}0$ ist dies klar, da konstante Funktionen immer messbar sind. Für $s{>}0$ bzw. $s{<}0$ gilt

$$\{r + s{\cdot}g \geqslant \alpha\} = \{g \geqslant \frac{\alpha - r}{s}\} \quad \text{bzw.} \quad \{r + s{\cdot}g \geqslant \alpha\} = \{g \leqslant \frac{\alpha - r}{s}\},$$

woraus sich wegen Satz 4.2 a) die Messbarkeit von $r{+}s{\cdot}g$ ergibt. Für $r{=}\alpha$ und $s{=}{-}1$ erhält man insbesondere die Messbarkeit der Funktion $\alpha{-}g$. Nach Satz 4.2 b) liegt daher die Menge $\{f \geqslant \alpha{-}g\}$ in $\mathfrak{A}$ und wegen

$$\{f + g \geqslant \alpha\} = \{f \geqslant \alpha{-}g\} \in \mathfrak{A}$$

folgt damit aus Satz 4.2 a) die Messbarkeit von $f + g$.

Die Messbarkeit von $f{-}g$ ergibt sich aus der Messbarkeit von $-g$ und $f{-}g = f{+}({-}g)$.

Für die Untersuchung von $f \cdot g$ beachte man zunächst, dass mit jeder messbaren Funktion h auch h^2 messbar ist. Es gilt nämlich

$$\{h^2 \geqslant \alpha\} = \begin{cases} \Omega & \text{für} \quad \alpha \leqslant 0 \\ \{h{\geqslant}\sqrt{\alpha}\} \cup \{h{\leqslant}{-}\sqrt{\alpha}\} & \text{für} \quad \alpha > 0. \end{cases}$$

Sind f und g *reellwertig*, stellen $f{+}g$ und $f{-}g$ auf ganz Ω definierte Funktionen dar, die deswegen - wie vorher gesehen - messbar sind. Damit sind auch $(f{+}g)^2$ und $(f{-}g)^2$ messbar. Aus

$$f \cdot g = \frac{1}{4}{\cdot}(f{+}g)^2 - \frac{1}{4}{\cdot}(f{-}g)^2$$

folgt damit die Messbarkeit von $f \cdot g$. Sind f und g beliebige messbare numerische Funktionen, so definieren wir für jedes $n{\in}\mathbb{N}$

$$f_n(x) := \min\{f(x), n\} \quad \text{und} \quad g_n(x) := \min\{g(x), n\}.$$

Die Funktionen f_n und g_n sind reellwertig und nach Teil a) sind daher auch $f_n \cdot g_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \cdot g_n = f \cdot g$ messbar.

c) Offensichtlich gilt

$$f = f^+ - f^- \quad \text{und} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Aus Teil a), b) und b) dieses Satzes folgt damit die Behauptung. ■

Bemerkung 4.5

Aus der Messbarkeit von $|f|$ folgt im Allgemeinen *nicht* die Messbarkeit von f. ❒

4.2. Das Lebesgue-Integral

Wie zu Beginn dieses Kapitels beschrieben führt die Definition des Integrals über die Menge der Elementarfunktionen.

Definition 4.6

Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Messraum. $A_1, \dots A_m$ seien Mengen der σ-Algebra $\mathfrak{A}$ und $a_1, \dots, a_m$ reelle Zahlen. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ der Form

$$f(\omega) := \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}(\omega)$$

wird als *Elementar-* oder *Treppenfunktion* bezeichnet. $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ bezeichne im Folgenden die Menge aller Elementarfunktionen. ❐

Satz 4.7

a) Die Menge $\mathscr{E}$ der Elementarfunktionen besteht aus allen $\mathfrak{A}$-messbaren reellwertigen Funktionen, die nur endlich viele verschiedene Werte annehmen. Insbesondere ergibt sich, dass jede Elementarfunktion in der Form $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$ dargestellt werden kann, wobei $A_1, \dots, A_n$ paarweise disjunkte Mengen aus $\mathfrak{A}$ sind, mit der Eigenschaft $\dot{\bigcup\limits_{j=1}^{m}} A_j = \Omega$. Darstellungen mit dieser Eigenschaft werden als *Normaldarstellung* von Elementarfunktionen bezeichnet.

b) Sind f und g zwei Elementarfunktionen, so gelten folgende Eigenschaften:

   i) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha \cdot f + \beta \cdot g \in \mathscr{E}$, d.h. $\mathscr{E}$ ist ein reeller Vektorraum.

   ii) $f \cdot g \in \mathscr{E}$

   iii) $\max(f, g) = f \vee g \in \mathscr{E}$

   iv) $\min(f, g) = f \wedge g \in \mathscr{E}$

   v) $\mathbb{1}_\Omega \wedge f \in \mathscr{E}$. ❑

Beweis:

a) Nach Definition ist jede Elementarfunktion messbar und nimmt nur endlich viele Werte an. Sei daher umgekehrt $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-messbare Funktion, die nur endlich viele Werte $w_1, \dots, w_m$ annimmt. Da f messbar ist, liegen die Mengen $A_i := f^{-1}(\{w_i\})$ in $\mathfrak{A}$, sind disjunkt und es gilt

$$f = \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot \mathbb{1}_{A_i} \in \mathscr{E}.$$

b) i) Für $f, g \in \mathscr{E}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ nimmt die Funktion $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ nur endlich viele Werte an, da f und g nur endlich viele Werte annehmen. Da $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ nach Satz 4.4 a) außerdem messbar ist, folgt die Behauptung aus Teil a).

ii) Dies folgt sofort aus $\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cap B}$.

iii) und iv) ergeben sich mit der gleichen Argumentation wie in i).

v) Ist Spezialfall von iv). ■

Wir sind nun in der Lage, den Integralbegriff für messbare Funktionen einzuführen. Die Idee ist die gleiche wie beim Riemannschen Integralbegriff. Man definiert zunächst den Integralbegriff für Elementarfunktionen, approximiert die zu integrierende Funktion durch Elementarfunktionen T_n und erklärt das Integral als Grenzwert (Supremum) der Integrale von T_n, falls dieser existiert.

Definition 4.8

Sei $T:=\sum_{j=1}^{m} a_j\cdot\mathbb{1}_{A_j}$ eine *nichtnegative* Elementarfunktion in Normaldarstellung. Wir definieren als *Integral der Elementarfunktion* $T:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ den Wert

$$\int_\Omega T d\mu := \sum_{j=1}^{m} a_j\cdot\mu(A_j)\in\mathbb{R}^\star \tag{4.1}$$

❐

Bemerkung 4.9

Definition 4.8 ist sinnvoll, weil man für verschiedene Darstellungen der Elementarfunktion T stets denselben Wert erhält. Dies ergibt sich aus folgender Überlegung. Besitzt T die zwei Normaldarstellungen

$$T=\sum_{k=1}^{\ell} b_k\cdot\mathbb{1}_{B_k}=\sum_{j=1}^{m} a_j\cdot\mathbb{1}_{A_j},$$

so gilt $a_j{=}b_k$, falls $A_j\cap B_k\neq\emptyset$. Ist nämlich $\tilde{x}{\in}A_{j_0}{\cap}B_{k_0}\neq\emptyset$ $(1{\leqslant}j_0{\leqslant}m, 1{\leqslant}k_0{\leqslant}\ell)$, folgt wegen der paarweisen Disjunktheit der Mengen B_k bzw. A_j:

$$b_{k_0}=\sum_{k=1}^{\ell} b_k\cdot\mathbb{1}_{B_k}(\tilde{x})=\sum_{j=1}^{m} a_j\cdot\mathbb{1}_{A_j}(\tilde{x})=a_{j_0}.$$

Mit $\Omega=\dot{\bigcup}_{j=1}^{m} A_j=\dot{\bigcup}_{k=1}^{\ell} B_k$ liefert dies wegen $\mu(A_j{\cap}B_k)=0$ für $A_j{\cap}B_k=\emptyset$:

$$\begin{aligned}
b_k\cdot\mu(B_k) &= b_k\cdot\mu\Big(B_k\cap\dot{\bigcup}_{j=1}^{m}A_j\Big) = b_k\cdot\mu\Big(\dot{\bigcup}_{j=1}^{m}(A_j{\cap}B_k)\Big)\\
&= b_k\cdot\sum_{j=1}^{m}\mu(A_j{\cap}B_k) = \sum_{j=1}^{m} b_k\cdot\mu(A_j{\cap}B_k)\\
&= \sum_{j=1}^{m} a_j\cdot\mu(A_j{\cap}B_k).
\end{aligned}$$

Summation über k liefert daher wegen $\sum_{k=1}^{\ell}\mu(A_j{\cap}B_k)=\mu\Big(\dot{\bigcup}_{k=1}^{\ell}(A_j{\cap}B_k)\Big)=\mu(A_j)$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\ell} b_k\cdot\mu(B_k) &= \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{m} a_j\cdot\mu(A_j{\cap}B_k)\\
&= \sum_{j=1}^{m} a_j\cdot\sum_{k=1}^{\ell}\mu(A_j{\cap}B_k)\\
&= \sum_{j=1}^{m} a_j\cdot\mu(A_j).
\end{aligned}$$

und damit die Unabhängigkeit des Integrals von der Wahl der Normaldarstellung einer Elementarfunktion. ❐

Satz 4.10

a) Sind T_1 und T_2 nichtnegative messbare Elementarfunktionen und α, β nichtnegative reelle Zahlen, so gilt:

$$\int_\Omega (\alpha \cdot T_1 + \beta \cdot T_2)\; d\mu = \alpha \cdot \int_\Omega T_1\; d\mu + \beta \cdot \int_\Omega T_2\; d\mu.$$

b) Sind T und S nichtnegative messbare Elementarfunktionen mit $T \leqslant S$, so gilt

$$\int_\Omega T d\mu \leqslant \int_\Omega S d\mu$$

❑

Beweis:

a) Da sich aus der Integraldefinition (4.8) sofort $\int_\Omega \alpha \cdot T d\mu = \alpha \int_\Omega T d\mu$ für jede nichtnegative Elementarfunktion und jedes $\alpha \geqslant 0$ ergibt, genügt es,

$$\int_\Omega (T_1 + T_2) d\mu = \int_\Omega T_1 d\mu + \int_\Omega T_2 d\mu$$

zu zeigen. Seien hierzu T_1, T_2 zwei Elementarfunktionen mit den Normaldarstellungen

$$T_1 = \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \mathbb{1}_{A_j}$$

und

$$T_2 = \sum_{k=1}^{\ell} b_k \cdot \mathbb{1}_{B_k}.$$

Wie in Bemerkung 4.9 gilt wegen $\dot{\bigcup}_{j=1}^{m} A_j = \Omega = \dot{\bigcup}_{k=1}^{\ell} B_k$

$$A_j = \dot{\bigcup_{k=1}^{\ell}} (A_j \cap B_k) \quad \text{und} \quad B_k = \dot{\bigcup_{j=1}^{m}} (A_j \cap B_k)$$

und wegen der paarweisen Disjunktheit der Mengen $A_j \cap B_k$ folgt daher

$$\mathbb{1}_{A_j} = \sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{1}_{A_j \cap B_k} \quad \text{und} \quad \mathbb{1}_{B_k} = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}_{A_j \cap B_k}$$

für alle $j = 1, \ldots, m$ und $k = 1, \ldots, \ell$. Dies liefert die neuen Normaldarstellungen

$$T_1 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\ell} a_j \cdot \mathbb{1}_{A_j \cap B_k} \quad \text{und} \quad T_2 = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m} b_k \cdot \mathbb{1}_{A_j \cap B_k}.$$

$T_1 + T_2$ hat damit die Normaldarstellung

$$T_1 + T_2 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\ell} (a_j + b_k) \cdot \mathbb{1}_{A_j \cap B_k},$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (T_1 + T_2) d\mu &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\ell} (a_j + b_k) \cdot \mu(A_j \cap B_k) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\ell} a_j \cdot \mu(A_j \cap B_k) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\ell} b_k \cdot \mu(A_j \cap B_k) \\
&= \int_\Omega T_1 d\mu + \int_\Omega T_2 d\mu
\end{aligned}$$

b) Wegen $T \leqslant S$ ist $S - T$ eine nichtnegative Elementarfunktion und aus $S = T + (S - T)$ folgt mit Teil a):

$$\int_\Omega S d\mu = \int_\Omega T d\mu + \underbrace{\int_\Omega (S-T) d\mu}_{\geqslant 0} \geqslant \int_\Omega T d\mu$$

■

Bemerkung 4.11

Satz 4.10 a) zeigt, dass in der Integraldefinition 4.8 auf die Normaldarstellung verzichtet werden kann. Er liefert nämlich

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \mathbb{1}_{A_j} d\mu = \sum_{j=1}^{m} a_j \int_\Omega \mathbb{1}_{A_j} d\mu = \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \mu(A_j)$$

unabhängig davon, ob die Mengen $A_1, \ldots, A_m$ paarweise disjunkt sind oder nicht. Das Arbeiten mit der Normaldarstellung hat nur beweistechnische Gründe. ❒

Der folgende Satz weist nach, dass *jede* numerische messbare Funktion als Grenzwert einer Folge von Elementarfunktionen dargestellt werden kann und legt es somit nahe, das Integral einer messbaren numerischen Funktion als Grenzwert der Integrale von Elementarfunktionen zu definieren, wodurch es möglich ist, jeder solchen Funktion ein Integral (eventuell den Wert $+\infty$) zuzuordnen. Die im Beweis des nächsten Satzes vorgenommene Konstruktion zeigt auch den zentralen Unterschied zum Riemann-Integral, wo der Definitionsbereich in Intervalle zerlegt wird, die keinerlei Rücksicht auf die zu integrierende Funktion f nehmen und daher zu schlechten Approximationen führen können. Um eine bessere Anpassung an den Verlauf des Graphen von f zu erhalten, zerlegt Lebesgue daher den Bildbereich, d.h. die Ordinatenachse, und betrachtet die Urbilder dieser Zerlegung[2].

[2]Lebesgue vergleicht dies mit einem Kaufmann, der Geld zählen will. Der „Riemannsche“ Kaufmann zählt Geldstücke oder Banknoten in der zufälligen Reihenfolge, in der sie auftreten. Der „Lebesguesche“ Kaufmann dagegen zählt erst, nachdem er sein Geld nach den einzelnen Geldstücken oder Banknoten sortiert hat.

Um die Lebesgue-Messbarkeit dieser Urbildmengen zu garantieren, muss die Abbildung f jedoch messbar sein.

Satz 4.12

Sei f eine messbare numerische Funktion auf dem Messraum $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann existiert eine Folge $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ messbarer Elementarfunktionen, die punktweise gegen f konvergiert, d.h. für jedes $\omega \in \Omega$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(\omega) = f(\omega)$. Ist $f \geqslant 0$, kann die Folge $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ sogar isoton gewählt werden, so dass $0 \leqslant T_1 \leqslant T_2 \leqslant \cdots \leqslant f$ gilt. ❏

Beweis:

Wegen $f = f^+ - f^-$ genügt es, zu zeigen, dass im Fall $f \geqslant 0$ eine monoton wachsende Folge $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(\omega) = f(\omega)$ existiert.

Für $n, j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leqslant j \leqslant n \cdot 2^n$ zerlegen wir den Definitionsbereich in die disjunkten Mengen

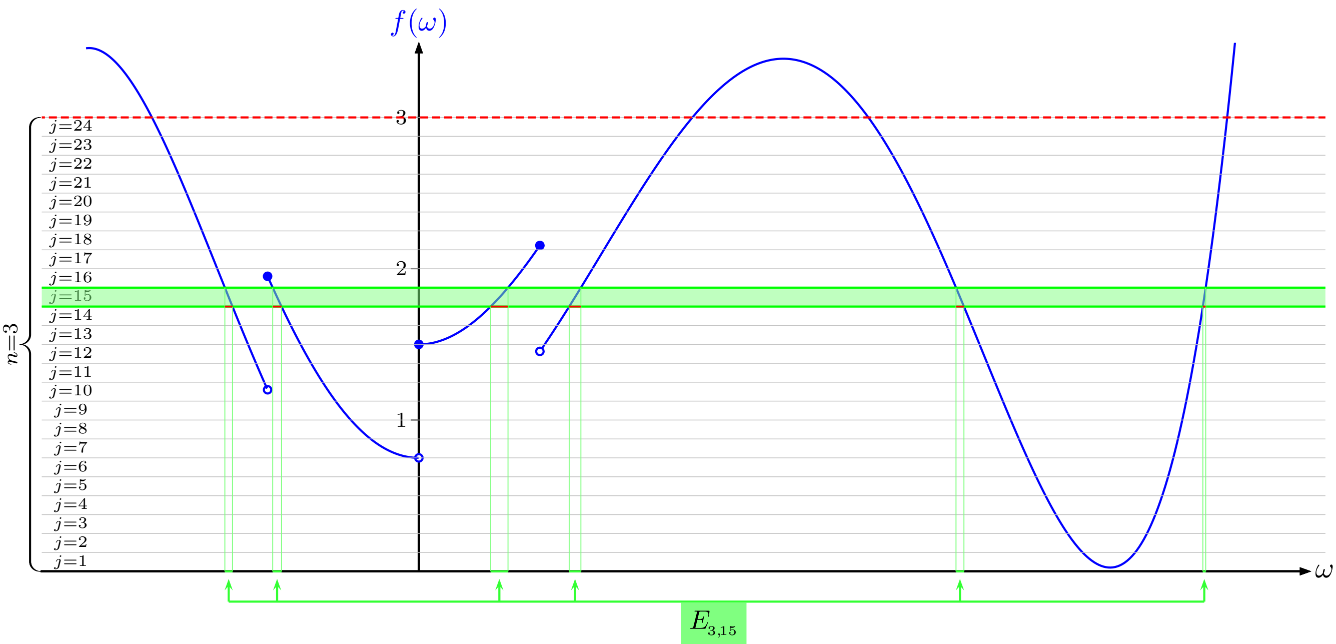
$$E_{n,j} := \left\{ \frac{j-1}{2^n} \leqslant f < \frac{j}{2^n} \right\} = f^{-1}\left(\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n} \right[\right)$$

$$F_n := \{ f \geqslant n \} = f^{-1}([n, +\infty]) \ .$$

Diese Zerlegung des Definitionsbereiches entsteht indirekt, indem der Wertebereich $[0, \infty]$ der Funktion zunächst in die Intervalle $[n, +\infty]$ und $[0, n[$ und dann Letzteres in äquidistante Teilintervalle der Länge $\frac{1}{2^n}$ zerlegt wird. Hierdurch wird jedes Intervall $[k, k+1[$ in 2^n gleich lange Teilintervalle aufgespalten ($k=0, \ldots, n-1$), wodurch die $n \cdot 2^n$ Teilintervalle

$$I_{n,j} := \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n} \right[$$

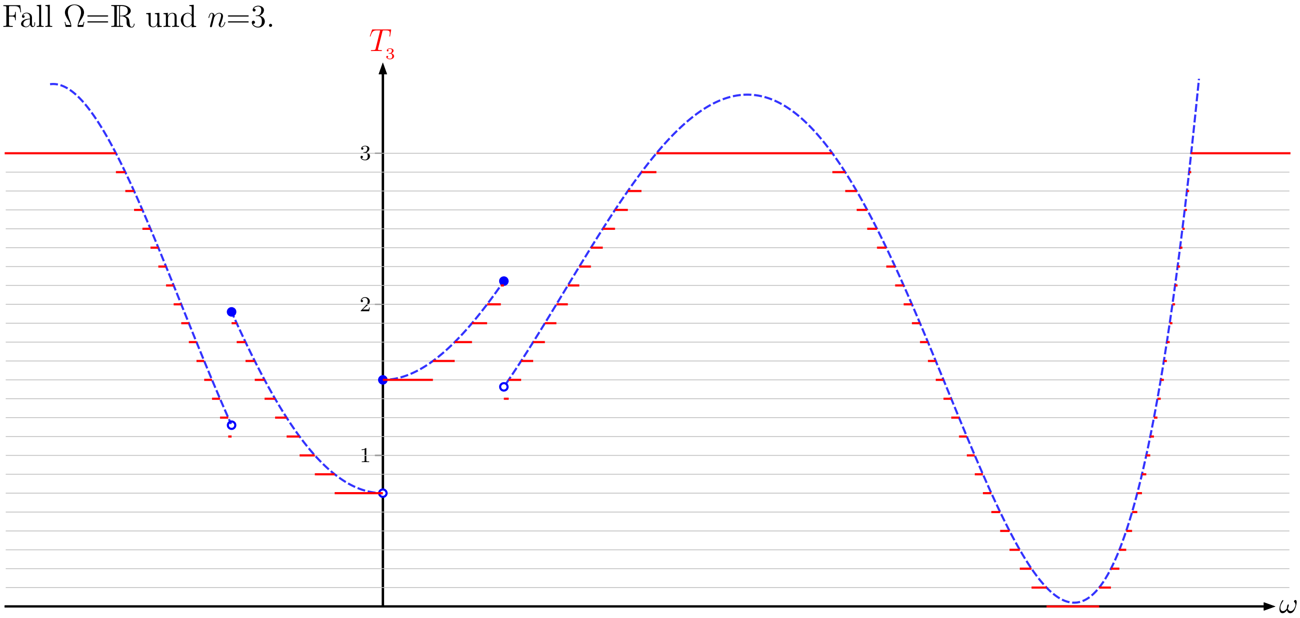
entstehen ($j=1, \ldots, n \cdot 2^n$). F_n ist das Urbild des Intervalles $[n, +\infty]$, die Mengen $E_{n,j}$ sind die Urbilder der Teilintervalle $I_{n,j}$ (siehe folgende Skizze im Fall $\Omega = \mathbb{R}$ und $n=3$, $j=15$).



Aufgrund der Messbarkeit von f sind die Mengen $E_{n,j}$ und F_n disjunkte Elemente der σ-Algebra $\mathfrak{A}$. Auf den Mengen $E_{n,j}$ und F_n definiert man die approximierende Treppenfunktion durch den kleinstmöglichen Wert, den f dort annehmen kann, d.h. durch $\frac{j-1}{2^n}$ auf $E_{n,j}$ und n auf F_n, also[3]

$$T_n := \sum_{j=1}^{n \cdot 2^n} \frac{j-1}{2^n} \cdot \mathbb{1}_{E_{n,j}} + n \cdot \mathbb{1}_{F_n}$$

Nachfolgende Graphik zeigt die approximierende Treppenfunktion T_3 der Funktion f im Fall $\Omega{=}\mathbb{R}$ und $n{=}3$.



Wir zeigen, dass $T_n \leqslant T_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Seien hierzu $\omega \in \Omega$ und $n \in \mathbb{N}$ fest aber beliebig. Wir unterscheiden die Fälle $f(\omega) \geqslant n{+}1$ und $0 \leqslant f(\omega) < n{+}1$.
Ist $f(\omega) \geqslant n{+}1$, so ergibt sich nach Definition der T_n

$$T_n(\omega) \;=\; n \;<\; n{+}1 \;=\; T_{n+1}(\omega) \;\leqslant\; f(\omega)\ .$$

Ist $0 \leqslant f(\omega) < n{+}1$, so liegt ω in genau einer Menge $E_{n+1,k}$, d.h. es ist

$$\frac{k-1}{2^{n+1}} \leqslant f(\omega) < \frac{k}{2^{n+1}},$$

wobei $1 \leqslant k \leqslant (n{+}1)\cdot 2^{n+1}$ eindeutig bestimmt ist. Nach Definition von T_{n+1} folgt daher

$$T_{n+1}(\omega) = \frac{k-1}{2^{n+1}} \cdot \mathbb{1}_{E_{n+1,k}}(\omega) = \frac{k-1}{2^{n+1}} \leqslant f(\omega)\ .$$

Ist $k = 2j{-}1$ ungerade, gilt $\dfrac{j-1}{2^n} \leqslant f(\omega) < \dfrac{j-\frac{1}{2}}{2^n}$. Daraus folgt $\omega \in E_{n,j}$ und

$$T_n(\omega) = \frac{j-1}{2^n} = \frac{2j-2}{2^{n+1}} = \frac{k-1}{2^{n+1}} = T_{n+1}(\omega)\ .$$

[3] Der Wert n kappt gewissermaßen f im oberen Bereich.

Ist $k = 2j$ gerade, gilt $\frac{j-\frac{1}{2}}{2^n} \leqslant f(\omega) < \frac{j}{2^n}$. Daraus folgt ebenfalls $\omega \in E_{n,j}$ und

$$T_n(\omega) = \frac{j-1}{2^n} = \frac{2j-2}{2^{n+1}} = \frac{k-2}{2^{n+1}} < \frac{k-1}{2^{n+1}} = T_{n+1}(\omega) \ .$$

Um die Konvergenz $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(\omega) = f(\omega)$ zu überprüfen, betrachten wir zunächst den Fall $f(\omega) = +\infty$. Dann gilt $T_n(\omega) = n$ für alle $n\in\mathbb{N}$, und die Behauptung ist erfüllt. Gelte daher $f(\omega) < \infty$. Für alle $n > f(\omega)$ existiert dann ein k mit $\omega \in E_{n,k}$ und daher

$$T_n(\omega) = \frac{k-1}{2^n} \leqslant f(\omega) < \frac{k}{2^n} = \frac{k-1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = T_n(\omega) + \frac{1}{2^n} \ .$$

Dies liefert $0 \leqslant f(\omega) - T_n(\omega) < \frac{1}{2^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. ■

Wir wollen nun das Integral einer nichtnegativen messbaren numerischen Funktion - wie vorher beschrieben - definieren.

Definition 4.13

Ist $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^\star$ eine messbare, nichtnegative numerische Funktion auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, so definieren wir das *Lebesgue-Integral von f bzgl. μ über Ω* durch

$$\int_\Omega f d\mu \ = \sup_{T\in\mathscr{E}, T\leqslant f} \int_\Omega T d\mu.$$ ❐

In Integraldefinition 4.13 hätte es im Prinzip genügt, auf isotone Folgen von Elementarfunktionen zurückzugreifen. Wir beweisen dies in zwei Schritten. Zunächst zeigen wir in Satz 4.14, dass zwei isotone Folgen von Elementarfunktionen mit gleichem Grenzwert f den gleichen Integralwert liefern und dann in Lemma 4.15, dass dieser mit dem Wert des Integrals von f übereinstimmt.

Satz 4.14

a) Für jede isotone Folge nichtnegativer messbarer Elementarfunktionen $(T_j)_{j=1}^\infty$ und jede messbare Elementarfunktion T mit $T \leqslant \sup\limits_{j\in\mathbb{N}} T_j$ gilt:

$$\int_\Omega T d\mu \leqslant \sup_{j\in\mathbb{N}} \int_\Omega T_j d\mu.$$

b) Sind $(T_j)_{j=1}^\infty$ und $(S_j)_{j=1}^\infty$ isotone Folgen nichtnegativer Elementarfunktionen, so gilt

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} T_j = \sup_{j\in\mathbb{N}} S_j \implies \sup_{j\in\mathbb{N}} \int_\Omega T_j d\mu = \sup_{j\in\mathbb{N}} \int_\Omega S_j d\mu.$$ ❑

Beweis:

a) Sei $T = \sum\limits_{j=1}^m a_j \cdot \mathbb{1}_{A_j}$, wobei $A_j\in\mathfrak{A}$ und $a_j\geqslant 0$ für $j=1, \ldots, m$ gilt. Ist $\alpha \in]0,1[$ fest aber beliebig, so sind nach Satz 4.2 b) die Mengen

$$B_k := \{T_k \geqslant \alpha\cdot T\}$$

messbar für alle $k \in \mathbb{N}$. Wegen $\sup\limits_{k \in \mathbb{N}} T_k \geqslant T > \alpha \cdot T$ gilt $\lim\limits_{k \to \infty} B_k = \Omega$, wobei wegen der Isotonie von $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ die Folge $(B_k)_{k=1}^{\infty}$ isoton ist. Es gilt also $A \cap B_k \uparrow A$ für jede messbare Menge A und da μ nach Satz 2.11 stetig von unten ist, folgt

$$\lim_{k \to \infty} \mu(A \cap B_k) = \mu(A).$$

Nach Definition von B_k gilt $T_k \geqslant \alpha \cdot T \cdot \mathbb{1}_{B_k}$ und daher nach Satz 4.10

$$\int_\Omega T_k d\mu \overset{4.10\text{ b)}}{\geqslant} \alpha \int_\Omega T \cdot \mathbb{1}_{B_k} d\mu \overset{4.10\text{ a)}}{=} \alpha \sum_{j=1}^{m} a_j \int_\Omega \mathbb{1}_{A_j} \mathbb{1}_{B_k} d\mu = \alpha \sum_{j=1}^{m} a_j \mu(A_j \cap B_k)$$

für alle k. Wegen der Isotonie von $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ gilt $\sup\limits_{k} \int_\Omega T_k d\mu = \lim\limits_{k \to \infty} \int_\Omega T_k d\mu$ und es folgt

$$\begin{aligned}
\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_\Omega T_k d\mu &= \lim_{k \to \infty} \int_\Omega T_k d\mu \\
&\geqslant \lim_{k \to \infty} \alpha \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \mu(A_j \cap B_k) \\
&= \alpha \cdot \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \lim_{k \to \infty} \mu(A_j \cap B_k) \\
&= \alpha \cdot \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \mu(A_j) \\
&= \alpha \cdot \int_\Omega T d\mu.
\end{aligned}$$

Da $\alpha \in \,]0,1[$ beliebig war, folgt die Behauptung durch den Grenzübergang $\alpha \uparrow 1$.

b) Seien $(T_j)_{j=1}^{\infty}$ und $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ zwei isotone nichtnegative Folgen messbarer Elementarfunktionen mit $\sup\limits_{j \in \mathbb{N}} T_j = \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} S_k$. Dann gilt für jedes $j \in \mathbb{N}$

$$T_j \leqslant \sup_{k \in \mathbb{N}} S_k$$

und damit nach Teil a)

$$\int_\Omega T_j d\mu \leqslant \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_\Omega S_k d\mu.$$

Supremumsbildung über j liefert

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \int_\Omega T_j d\mu \leqslant \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_\Omega S_k d\mu.$$

Vertauscht man bei dieser Argumentation die Folgen $(T_j)_{j=1}^{\infty}$ und $(S_k)_{k=1}^{\infty}$, gilt entsprechend

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_\Omega S_k d\mu \leqslant \sup_{j \in \mathbb{N}} \int_\Omega T_j d\mu.$$

■

Der nachfolgende Satz zeigt, wie vorher schon erwähnt, dass es bei der Integraldefinition 4.13 im Prinzip genügt hätte, auf isotone Folgen von Elementarfunktionen zurückzugreifen. Er gilt für beliebige monotone Folgen nichtnegativer messbarer Funktionen und stellt damit einen Spezialfall des *Satzes von der monotonen Konvergenz* (Satz 4.16) dar.

Lemma 4.15

a) Sei $f \geqslant 0$ eine messbare nichtnegative numerische Funktion und $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ eine isotone Folge nichtnegativer messbarer Elementarfunktionen mit $\lim\limits_{k\to\infty} T_k = f$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega T_k d\mu = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} T_k d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

b) Sind f und g zwei nichtnegative messbare numerische Funktionen und $\alpha, \beta \in [0, \infty]$, so gilt

$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_\Omega f d\mu + \beta \int_\Omega g d\mu.$$

c) Sind f und g zwei nichtnegative messbare numerische Funktionen mit $f \leqslant g$, so gilt

$$\int_\Omega f d\mu \leqslant \int_\Omega g d\mu$$

❑

Beweis:

a) Sei die Folge $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ wie vorgegeben. Da $\int_\Omega f d\mu$ als Supremum definiert ist, existiert eine Folge $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ von nichtnegativen Elementarfunktionen mit $S_k \leqslant f$ für $k \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega S_k d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

Nach Satz 4.7 c) ist dann für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$R_k := T_k \vee S_1 \vee \cdots \vee S_k$$

eine Elementarfunktion, die wegen der Maximumbildung offensichtlich isoton ist. Wegen $T_k \leqslant R_k \leqslant f$ gilt außerdem $\lim\limits_{k\to\infty} R_k = f$ und daher nach Satz 4.14 b)

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega R_k d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega T_k d\mu \ . \tag{4.2}$$

Da nach Definition von R_k auch

$$S_k \leqslant R_k \leqslant f$$

gilt, folgt nach Satz 4.10 b) und der Definition von $\int_\Omega f d\mu$:

$$\int_\Omega S_k d\mu \overset{4.10\text{ b)}}{\leqslant} \int_\Omega R_k d\mu \overset{4.13}{\leqslant} \int_\Omega f d\mu.$$

Grenzwertbildung $k \longrightarrow \infty$ liefert dann

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega S_k d\mu \leqslant \lim_{k\to\infty} \int_\Omega R_k d\mu \leqslant \int_\Omega f d\mu,$$

also zusammen mit Gleichung (4.2) die Behauptung

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega T_k d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega R_k d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

b) Seien $(T_k)_{k=1}^\infty$ und $(S_k)_{k=1}^\infty$ isotone, nichtnegative messbare Elementarfunktionen mit $\lim\limits_{k\to\infty} T_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} T_k = f$ und $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} S_k = g$. Wir betrachten zuerst den Fall $\alpha, \beta < \infty$. Dann konvergiert die Folge $(\alpha \cdot T_k + \beta \cdot S_k)_{k=1}^\infty$ isoton gegen $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ und nach Teil a) dieses Satzes gilt daher

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) d\mu &\overset{4.15\text{ a)}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_\Omega (\alpha \cdot T_k + \beta \cdot S_k) d\mu \\
&\overset{4.10\text{ a)}}{=} \lim_{k\to\infty} \left[\alpha \cdot \int_\Omega T_k d\mu + \beta \cdot \int_\Omega S_k d\mu\right] \\
&= \alpha \cdot \lim_{k\to\infty} \int_\Omega T_k d\mu + \beta \cdot \lim_{k\to\infty} \int_\Omega S_k d\mu \\
&\overset{4.15\text{ a)}}{=} \alpha \cdot \int_\Omega f d\mu + \beta \cdot \int_\Omega g d\mu
\end{aligned}$$

Setzt man $\alpha = \beta = 1$ folgt insbesondere die für den Beweis von Teil c) erforderliche Aussage

$$\int_\Omega (f + g) d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu \ ,$$

Es bleibt noch $\int_\Omega \alpha f d\mu = \alpha \int_\Omega f d\mu$ für $\alpha = \infty$ zu zeigen. Sei hierzu $A := \{f > 0\}$. Dann gilt

$$\infty \cdot f = \infty \cdot f \cdot (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{\complement A}) = \infty \cdot f \cdot \mathbb{1}_A + \infty \cdot \underbrace{f \cdot \mathbb{1}_{\complement A}}_{=0} = \infty \cdot f \cdot \mathbb{1}_A = \infty \cdot \mathbb{1}_A.$$

Daraus ergibt sich zunächst:

$$\int_\Omega \infty \cdot f d\mu = \int_\Omega \infty \cdot \mathbb{1}_A d\mu = \infty \cdot \mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad \mu(A) = 0 \\ \infty & \text{falls} \quad \mu(A) > 0 \end{cases}$$

Andererseits gilt wiederum wegen $f \cdot \mathbb{1}_{\complement A} = 0$

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f \cdot \mathbb{1}_A d\mu.$$

Ist $\mu(A) = 0$ folgt daher $\int T d\mu = 0$ für jede Elementarfunktion $T \leqslant f \cdot \mathbb{1}_A$. Nach Definition des Integrals ist daher auch $\int f d\mu = 0$, also $\infty \cdot \int f d\mu = 0$.

Gilt andererseits $\mu(A) > 0$, und definiert man $A_n := \{f > \frac{1}{n}\}$ existiert wegen $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ ein $n\in\mathbb{N}$ mit $\mu(A_n) > 0$, woraus wegen $A_n \subset A$ folgt:

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f \cdot \mathbb{1}_A d\mu \overset{\text{Teil c)}}{\geqslant} \int_\Omega f \cdot \mathbb{1}_{A_n} d\mu \overset{\text{Teil c)}}{\geqslant} \int_\Omega \frac{1}{n} \cdot \mathbb{1}_{A_n} d\mu = \frac{1}{n} \cdot \mu(A_n) > 0.$$

Es gilt also $\infty \cdot \int f d\mu = \infty$, d.h. in beiden Fällen ist $\infty \cdot \int f d\mu = \int \infty \cdot f d\mu$.

c) Wegen $g = f + (g-f)$ ergibt sich aus Teil b)

$$\int g d\mu = \int \left[f + (g-f)\right] d\mu \overset{\text{b)}}{=} \int f d\mu + \int (g-f) d\mu \geqslant \int f d\mu$$

■

Die folgende Aussage - wohl eine der wichtigsten in der Integrationstheorie - zeigt, dass Lemma 4.15 für beliebige isotone Folgen messbarer nichtnegativer Funktionen gilt. Vereinfacht ausgedrückt zeigt er, dass es beim Lebesgue-Integral mit nur geringen Einschränkungen möglich ist, Integration und Grenzwertbildung zu vertauschen. Bemerkenswert ist, dass die auftretenden Funktionen auch den Wert ∞ annehmen dürfen, was im Nachhinein die Definition numerisch messbarer Funktionen erklärt und auch, warum bei der Integraldefinition der Wert ∞ zugelassen worden ist.

Satz 4.16 (Monotone Konvergenz)

Ist $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine isotone Folge nichtnegativer messbarer numerischer Funktionen, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

❑

Beweis:

Wir definieren $f := \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$. Nach Satz 4.4 b) ist f eine nichtnegative messbare Funktion und wegen der Isotonie der Folge $(f_k)_{k=1}^\infty$ gilt $f = \lim\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$.

Es genügt, die Existenz einer isotonen Folge nichtnegativer Elementarfunktionen $(T_k)_{k=1}^\infty$ nachzuweisen, die die Eigenschaften

$$T_k \leqslant f_k \quad \text{und} \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} T_k = f$$

hat. Wegen $T_k \leqslant f_k \leqslant f$ folgt dann aufgrund der Intergraldefinition

$$\int_\Omega T_k d\mu \leqslant \int_\Omega f_k d\mu \leqslant \int_\Omega f d\mu$$

und wegen $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_k = f$ folgt aus Lemma 4.15

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega T_k d\mu = \int_\Omega f d\mu,$$

also auch

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_k d\mu = \int_\Omega f d\mu = \int_\Omega \sup_{n\in\mathbb{N}} f_k d\mu.$$

Die Existenz der Folge $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ sieht man folgendermaßen:
Nach Satz 4.12 existiert zu jeder Funktion f_k eine isotone Folge von Elementarfunktionen $(S_{k,m})_{m=1}^{\infty}$ mit $\lim\limits_{m\to\infty} S_{k,m} = f_k$. Definiert man nun $T_k := S_{1,k} \vee S_{2,k} \vee \cdots \vee S_{k,k}$ für $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{cccccccc}
S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} & S_{1,4} & \cdots & S_{1,k} & \xrightarrow[k\to\infty]{} & f_1 \\
 & \vee & \vee & \vee & & & & \\
S_{2,1} & S_{2,2} & S_{2,3} & S_{2,4} & \cdots & S_{2,k} & \xrightarrow[k\to\infty]{} & f_2 \\
 & & \vee & \vee & & & & \\
S_{3,1} & S_{3,2} & S_{3,3} & S_{3,4} & \cdots & S_{3,k} & \xrightarrow[k\to\infty]{} & f_3 \\
 & & & \vee & & & & \\
S_{4,1} & S_{4,2} & S_{4,3} & S_{4,4} & \cdots & S_{4,k} & \xrightarrow[k\to\infty]{} & f_4 \\
 & & & & & & & \downarrow \\
T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & & \longrightarrow & & f
\end{array}$$

so ist $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ isoton, da wegen der Isotonie der Folgen $(S_{j,m})_{m=1}^{\infty}$

$$T_k \;=\; S_{1,k} \vee \cdots \vee S_{k,k} \;\leqslant\; S_{1,k+1} \vee \cdots \vee S_{k,k+1} \vee S_{k+1,k+1} \;=\; T_{k+1}$$

gilt. Aus der Isotonie der Folge $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ folgt $T_k \leqslant f_k$, denn es gilt für $j \leqslant k$

$$S_{j,k} \leqslant f_j \leqslant f_k$$

und damit die erste geforderte Eigenschaft

$$T_k \;=\; S_{1,k} \vee S_{2,k} \vee \cdots \vee S_{k,k} \;\leqslant\; f_k \vee f_k \vee \cdots \vee f_k \;=\; f_k.$$

Nach Definition von $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ gilt offenbar für alle $k \geqslant j$

$$S_{j,k} \;\leqslant\; S_{1,k} \vee S_{2,k} \vee \cdots \vee S_{j,k} \vee \cdots \vee S_{k,k} \;=\; T_k$$

und somit

$$f_j \;=\; \sup_{k\in\mathbb{N}} S_{j,k} \;\leqslant\; \sup_{k\in\mathbb{N}} T_k \;\leqslant\; \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k = f.$$

Das Supremum über j ergibt die noch fehlende Eigenschaft $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} T_k = f$:

$$f \;=\; \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j \;\leqslant\; \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\mathbb{N}} T_k \;=\; \sup_{k\in\mathbb{N}} T_k \;\leqslant\; f$$

■

Bemerkung 4.17

i) Ohne die Voraussetzung der Isotonie wird Satz 4.16 falsch. Man betrachte hierzu als Beispiel den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1, \lambda)$ mit der Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$

$$f_n(x) := \frac{1}{n} \cdot \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$$

Die Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert auf $\mathbb{R}$ offensichtlich gegen 0 (sogar gleichmäßig), aber wegen

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_0^n \frac{1}{n} dx = \left[\frac{1}{n} \cdot x\right]_0^n = 1$$

konvergiert die Folge der Integrale nicht gegen 0 sondern gegen 1, d.h. es gilt

$$1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n d\lambda = 0$$

ii) Ein „eleganterer" Beweis von Satz 4.16, der jedoch nicht direkt auf die Integraldefinition zurückgreift, sieht folgendermaßen aus.

Sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine isotone Folge nichtnegativer messbarer numerischer Funktionen, die gegen f konvergiert. Wegen $f_k \leqslant f$ gilt zunächst wegen Lemma 4.15 a)

$$\int_{\Omega} f_k d\mu \leqslant \int_{\Omega} f d\mu$$

und da aufgrund der Isotonie der Folge $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ auch die Folge der Integrale isoton und damit konvergent ist (evtl. mit Grenzwert ∞!), folgt zunächst

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} f_k d\mu \leqslant \int_{\Omega} f d\mu$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung wählen wir eine beliebige Treppenfunktion T mit $0 \leqslant T \leqslant f$ und zeigen, dass

$$\int_{\Omega} T d\mu \leqslant \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} f_k d\mu$$

und damit auch

$$\int_{\Omega} f d\mu \;=\; \sup_{T\leqslant f} \int_{\Omega} T d\mu \;\leqslant\; \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} f_k d\mu$$

gilt. Für eine beliebige reelle Zahl $\alpha>1$ betrachten wir hierzu die Mengen

$$A_n := \{T \leqslant \alpha \cdot f_n\}$$

Aufgrund der Isotonie der f_n ist die Folge der Mengen A_n ebenfalls isoton. Da die Ungleichung

$$T(\omega) \leqslant f(\omega) < \alpha \cdot f(\omega) = \lim_{n\to\infty} \alpha \cdot f_n(\omega)$$

gilt, liegt jedes $\omega \in \Omega$ in einer Menge A_{n_0}, d.h. die Mengenfolge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert isoton gegen Ω. Nach Definition der Mengen A_n gilt

$$T \cdot \mathbb{1}_{A_n} \leqslant \alpha \cdot f_n$$

Als Produkt zweier Treppenfunktionen ist auch $T \cdot \mathbb{1}_{A_n}$ eine Treppenfunktion und wegen $A_n \uparrow \Omega$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} T \cdot \mathbb{1}_{A_n} = T \cdot \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n} = T \cdot \mathbb{1}_\Omega = T$$

Mit Lemma 4.15 a) ergibt sich daher

$$\int_\Omega T d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_\Omega T \cdot \mathbb{1}_{A_n} d\mu \;\leqslant\; \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \alpha \cdot f_n d\mu \;=\; \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu$$

Der Grenzübergang $\lim\limits_{\alpha\to 1}$ liefert schließlich die gesuchte Ungleichung

$$\int_\Omega T d\mu \;\leqslant\; \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu$$

❐

Folgerung 4.18

Ist $(f_k)_{k=1}^\infty$ eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen, so gilt

a) $\displaystyle\int_\Omega \Big(\sum_{k=1}^\infty f_k\Big) d\mu \;=\; \sum_{k=1}^\infty \int_\Omega f_k d\mu.$

b) $\displaystyle\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \; d\mu \;\leqslant\; \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \; d\mu$ (**Lemma von Fatou**) ❐

Beweis:

a) Die Folge $(S_m)_{m=1}^\infty$ der Partialsummen, d.h. mit $S_m := f_1 + f_2 + \dots + f_m$, ist isoton und konvergiert gegen $\sum\limits_{k=1}^\infty f_k$. Daher gilt nach Satz 4.16

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega S_m d\mu = \int_\Omega \Big(\sum_{k=1}^\infty f_k\Big) d\mu.$$

Nach Satz 4.15 b) gilt jedoch

$$\int_\Omega S_m d\mu = \int_\Omega (f_1 + f_2 + \dots + f_m) d\mu = \sum_{k=1}^m \int_\Omega f_k d\mu$$

und daher

$$\sum_{k=1}^\infty \int_\Omega f_k d\mu = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^m \int_\Omega f_k d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega S_m d\mu = \int_\Omega \Big(\sum_{k=1}^\infty f_k\Big) d\mu.$$

b) Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $g_n(\omega) := \inf_{i \geqslant n} f_i(\omega)$. Nach Definition des Infimums ist $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine isotone Folge - nach Satz 4.4 b) messbarer- Funktionen mit $g_n \leqslant f_n$. Nach Definition des Limes inferior gilt außerdem

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n \ .$$

Beachtet man, dass für konvergente Folgen $\lim_{n\to\infty} = \liminf_{n\to\infty} = \limsup_{n\to\infty}$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \; d\mu &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} g_n \; d\mu \\ &\overset{\text{Satz 4.16}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \; d\mu \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \; d\mu \\ &\overset{\text{Satz 4.15 c}}{\leqslant} \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \; d\mu \end{aligned}$$

■

Da eine beliebige numerische Funktion $f = f^+ - f^-$ genau dann messbar ist, wenn ihr Positivteil $f^+ = f \vee 0$ *und* ihr Negativteil $f^- = (-f) \vee 0$ messbar sind, liegt es nahe, das Integral von f über die Integrale der positiven Funktionen f^+ und f^- zu definieren.

Definition 4.19

Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}^\star$ eine messbare numerische Funktion auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, so definieren wir das *Lebesgue-Integral von f bzgl.* μ über Ω durch

$$\int_\Omega f \; d\mu := \int_\Omega f^+ d\mu \; - \; \int_\Omega f^- d\mu,$$

sofern zumindest eines der Integrale auf der rechten Seite endlich ist. f heißt in diesem Fall *quasi-integrierbar*. Ist $\int_\Omega f d\mu$ sogar endlich, heißt f auf Ω *Lebesgue-integrierbar bzgl.* μ oder kurz μ*-integrierbar*. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\int_\Omega f^+ d\mu$ *und* $\int_\Omega f^- d\mu$ endlich sind. $\mathcal{L}^1(\mu)$ bezeichne im Folgenden die Menge aller μ-integrierbaren Funktionen. ❐

Bemerkung 4.20

i) Um eine möglichst einfache Form späterer „Integralsätze“ zu erhalten, wurden in Definition 4.19 die Werte $\pm\infty$ explizit zugelassen. Die Terminologie ist jedoch verwirrend, da für $\int_\Omega f \; d\mu = \pm\infty$ das Integral zwar (im uneigentlichen Sinne) existiert, f aber in diesem Fall *nicht* als μ-integrierbar bezeichnet wird. Die Bezeichnung integrierbar ist ausschließlich für den Fall $|\int_\Omega f d\mu| < \infty$ reserviert. Zur Vermeidung von Irrtümern hat man daher für den Fall, dass nur f^+ oder f^- ein endliches Integral besitzten und daher $\int_\Omega f d\mu = \pm\infty$ gilt, die Bezeichnung quasi-integrierbar gewählt. Insbesondere sind nichtnegative bzw. nichtpositive messbare Funktionen f quasiintegrierbar, da dann f^- bzw. f^+ mit der integrierbaren Nullfunktion übereinstimmen.

ii) Will man die Variable der Funktion f hervorheben, schreibt man statt $\int_\Omega f d\mu$ auch $\int_\Omega f(\omega)\ d\mu(\omega)$ oder $\int_\Omega f(\omega)\ \mu(d\omega)$.

iii) Ist $A \in \mathfrak{A}$ eine messbare Teilmenge von Ω, so ist das Tripel $(A, \mathfrak{A} \cap A, \mu)$ ebenfalls ein Maßraum. Ist f messbar auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, so folgt dann sofort

$$\int_A f\ d\mu = \int_\Omega f \cdot \mathbb{1}_A\ d\mu.$$

❐

Satz 4.21

Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^\star$ zwei messbare numerische Funktionen.

a) Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ und f auf Ω integrierbar, so gilt

$$\int_\Omega \alpha f\ d\mu = \alpha \int_\Omega f\ d\mu\ .$$

b) Gilt $f \leqslant g$ und sind f und g quasiintegrierbar, so folgt

$$\int_\Omega f\ d\mu \leqslant \int_\Omega g\ d\mu.$$

c) Ist f beschränkt, d.h. existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leqslant f(\omega) \leqslant b$ für alle $\omega \in \Omega$ und ist $\mu(\Omega) < \infty$, so gilt

$$a \cdot \mu(\Omega) \leqslant \int_\Omega f\ d\mu \leqslant b \cdot \mu(\Omega)\ .$$

d) Ist N eine Menge vom Maß 0, d.h. gilt $\mu(N) = 0$, so folgt

$$\int_N f\ d\mu = 0\ .$$

❐

Beweis:

a) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und die messbare Funktion f vorgegeben. Wegen $\alpha = \alpha^+ - \alpha^-$ und $f = f^+ - f^-$ mit $\alpha^+, \alpha^-, f^+, f^- \geqslant 0$ folgt

$$\alpha \cdot f \ = \ (\alpha^+ - \alpha^-) \cdot (f^+ - f^-) \ = \ (\underbrace{\alpha^+ f^+ + \alpha^- f^-}_{=(\alpha f)^+}) - (\underbrace{\alpha^- f^+ + \alpha^+ f^-}_{=(\alpha f)^-}).$$

Nach der allgemeinen Integraldefinition 4.19 und Lemma 4.15 b) ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \alpha f d\mu &\overset{4.19}{=} \int_\Omega (\alpha^+ f^+ + \alpha^- f^-) d\mu - \int_\Omega (\alpha^- f^+ + \alpha^+ f^-) d\mu \\
&\overset{4.15}{=} \alpha^+ \int_\Omega f^+ d\mu + \alpha^- \int_\Omega f^- d\mu - \alpha^- \int_\Omega f^+ d\mu - \alpha^+ \int_\Omega f^- d\mu \\
&= \alpha^+ \int_\Omega f d\mu - \alpha^- \int_\Omega f d\mu \\
&= \alpha \int_\Omega f d\mu
\end{aligned}$$

b) Wegen $f \leqslant g$ folgt $f^+ = \max\{f, 0\} \leqslant \max\{g, 0\} \leqslant g^+$. Aus $-g \leqslant -f$ folgt entsprechend $g^- = (-g)^+ \leqslant (-f)^+ = f^-$. Wendet man Lemma 4.15 c) an, erhält man

$$\int_\Omega f d\mu \;=\; \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu \;\leqslant\; \int_\Omega g^+ d\mu - \int_\Omega g^- d\mu \;=\; \int_\Omega g d\mu$$

c) Da $a \cdot \mathbb{1}_\Omega \leqslant f \leqslant b \cdot \mathbb{1}_\Omega$ gilt, ergibt sich aus Teil b) direkt die Aussage

$$a \cdot \mu(\Omega) \;\leqslant\; \int_\Omega f \; d\mu \;\leqslant\; b \cdot \mu(\Omega) \; .$$

d) Wegen $\int_N f d\mu = \int_N f^+ d\mu - \int_N f^- d\mu$ genügt es wieder, den Fall $f \geqslant 0$ zu betrachten. Offensichtlich gilt $f \cdot \mathbb{1}_N \leqslant \infty \cdot \mathbb{1}_N$, woraus mit Teil c) folgt

$$0 \;\leqslant\; \int_N f \; d\mu \;=\; \int_\Omega f \cdot \mathbb{1}_N \; d\mu \;\leqslant\; \int_\Omega \infty \cdot \mathbb{1}_N \; d\mu \;=\; \infty \cdot \mu(N) \;=\; 0$$

■

Satz 4.22

Eine messbare numerische Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^\star$ ist genau dann integrierbar, wenn eine der folgenden vier äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

i) f^+ und f^- sind integrierbar.

ii) Es existieren integrierbare Funktionen $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ mit $f = u - v$ (Insbesondere ist $u(\omega) - v(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ definiert).

iii) Es gibt eine integrierbare Funktion g mit $|f| \leqslant g$.

iv) $|f|$ ist integrierbar. ❑

Beweis:

Da definitionsgemäß f genau dann integrierbar ist, wenn i) gilt, ist nur die Äquivalenz der vier Aussagen zu zeigen.

i) $\Rightarrow$ ii): $u := f^+$ und $v := f^-$ leisten das Gewünschte.

ii) $\Rightarrow$ iii): Wegen $f = u - v \leqslant u \leqslant u + v$ und $-f = v - u \leqslant v \leqslant u + v$ gilt $|f| \leqslant u + v$. Da $u + v$ nach Lemma 4.15 b) integrierbar ist, leistet $g := u + v$ das Gewünschte.

iii) $\Rightarrow$ iv): Folgt aus 4.21 b).

iv) $\Rightarrow$ i): Folgt wiederum aus 4.21 b), wenn man $f^+ \leqslant |f|$ und $f^- \leqslant |f|$ beachtet. ■

Satz 4.23

Seien f und g integrierbare numerische Funktionen auf Ω und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

a) $\alpha f + \beta g$ ist (sofern überall auf Ω definiert) integrierbar mit

$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_\Omega f d\mu + \beta \int_\Omega g d\mu.$$

b) $f \vee g$ und $f \wedge g$ sind integrierbar.

c) $\left| \int_\Omega f d\mu \right| \leqslant \int_\Omega |f| d\mu.$ ❑

Beweis:

a) Wegen Satz 4.21 a) genügt es $\int_\Omega (f+g) d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu$ zu zeigen. Wegen

$$f + g = f^+ {+} g^+ - (f^- {+} g^-)$$

und da f^+, g^+ und f^-, g^- nach Voraussetzung integrierbar sind, ergibt sich aus Lemma 4.15 b), dass auch $f^+ {+} g^+$ und $f^- {+} g^-$ integrierbar sind. Mit $u := f^+ {+} g^+$ und $v := f^- {+} g^-$ ergibt sich die Integrierbarkeit von $f + g = u - v$ aus Satz 4.22 ii).

b) Wegen $|f \vee g| \leqslant |f| + |g|$ und $|f \wedge g| \leqslant |f| + |g|$ folgt Teil b) mittels Satz 4.22 iii), da $|f|$, $|g|$ und damit nach Lemma 4.15 b) auch $|f| + |g|$ integrierbar ist.

c) Wegen $f \leqslant |f|$ und $-f \leqslant |f|$ ergibt sich aus Satz 4.21 b)

$$\int_\Omega f d\mu \leqslant \int_\Omega |f| d\mu \quad \text{und} \quad \int_\Omega -f d\mu \leqslant \int_\Omega |f| d\mu.$$

Da nach Teil a) $\int -f d\mu = -\int f d\mu$ gilt, folgt die Behauptung. ■

4.3. Fast überall bestehende Eigenschaften

Betrachtet man eine Menge $N \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(N) = 0$, so ist diese Menge im Sinne des Maßes μ gewissermaßen „bedeutungslos“. Ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, bedeutet dies, dass N ein Ereignis mit Eintrittswahrscheinlichkeit 0 ist. Integriert man eine Funktion, spielt es für das Ergebnis in diesem Fall keine Rolle, ob N in der Integrationsmenge liegt oder nicht, d.h. es gilt

$$\int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega) = \int_{\Omega \setminus N} f(\omega) d\mu(\omega).$$

Dies legt es nahe, zu sagen, dass eine Eigenschaft „fast überall“ auf Ω gilt, wenn die Menge M der Punkte, die diese Eigenschaft *nicht* besitzen, das Maß 0 hat. Da M i.A. jedoch nicht messbar ist, d.h. nicht in $\mathfrak{A}$ liegt, fordert man sie als Teilmenge einer messbaren Menge $N \in \mathfrak{A}$, die das Maß 0 hat.

Definition 4.24

a) Eine Menge $N \subset \Omega$ heißt *μ-Nullmenge*, wenn gilt

$$N \in \mathfrak{A} \quad \text{und} \quad \mu(N) = 0.$$

b) Es sei E eine Eigenschaft derart, dass für jeden Punkt $\omega{\in}\Omega$ definiert ist, ob ω diese Eigenschaft besitzt oder nicht. Wir sagen

„μ-fast alle $\omega{\in}\Omega$ besitzen die Eigenschaft E“

oder

„E gilt μ-fast überall auf Ω“,

wenn alle ω, die Eigenschaft E **nicht** besitzen, in einer μ-Nullmenge liegen. ❐

Bemerkung 4.25

i) Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass nicht verlangt wird, dass die Menge $N_{\bar{\mathsf{E}}}$ aller $\omega{\in}\Omega$, welche die Eigenschaft E *nicht* besitzen, eine μ-Nullmenge ist. Gefordert wird nur, dass eine μ-Nullmenge N in $\mathfrak{A}$ mit $N_{\bar{\mathsf{E}}} \subset N$ existiert. Je nach betrachteter Eigenschaft kann im allgemeinen nämlich nicht garantiert werden, dass $N_{\bar{\mathsf{E}}}$ zu $\mathfrak{A}$ gehört[4]. Gilt $N_{\bar{\mathsf{E}}} \subsetneqq N$, enthält N Elemente, die die Eigenschaft E besitzen.

ii) Die abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wieder eine Nullmenge. Jede zu $\mathfrak{A}$ gehörige Teilmenge einer Nullmenge aus Isotoniegründen eine Nullmenge.

iii) Liegt ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ vor, verwendet man die Sprechweise *„E gilt μ-fast sicher“* oder *„E gilt mit Wahrscheinlichkeit 1.* ❐

Beispiel 4.26

Eine im folgenden häufig auftretende Eigenschaft E, ist beispielsweise die Gleichheit der Werte zweier auf Ω definierter Funktionen f, g in $\omega{\in}\Omega$. Man sagt in diesem Fall, f und g sind auf Ω *μ-fast überall gleich*, oder

$$f = g \quad \mu\text{-fast überall}.$$

Betrachtet man z.B. die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := x^2 \text{ und } g(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ 1 & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

[4]Eigenschaften, die über messbare Funktionen definiert werden, wie z.B. die Mengen $\{f{=}g\}, \{f{\neq}g\}$, $\{f{>}g\}$, führen i.d.R. zu Mengen in $\mathfrak{A}$ und erfordern daher i.a. diese feine Unterscheidung nicht, da dann die Menge $N_{\bar{\mathsf{E}}}$ automatisch messbar ist. Man beachte hierzu die nachfolgenden Beispiele und Sätze.

so gilt $f = g$ λ-fast überall. Es ist nämlich

$$\{f \neq g\} = \mathbb{Q} \in \mathfrak{B}$$

und wegen der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ gilt bekanntlich $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$. ❐

Satz 4.27

Für jede $\mathfrak{A}$-messbare numerische Funktion $f \geqslant 0$ auf Ω gilt

$$\int_\Omega f d\mu = 0 \iff \{f > 0\} \text{ ist } \mu\text{-Nullmenge} \iff f = 0 \ \mu\text{-fast überall.}$$ ❑

Beweis:

Wegen der Messbarkeit von f liegt die Menge

$$N := \{f{\neq}0\} = \{f{>}0\}$$

in $\mathfrak{A}$. Zu zeigen ist also:

$$\int_\Omega f \, d\mu = 0 \iff \mu(N) = 0.$$

Wir definieren in $\mathfrak{A}$ die isotone Mengenfolge $\big(A_n\big)_{n=1}^\infty$ durch $A_n := \{f{>}\frac{1}{n}\}$. Dann gilt

$$N = \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^\infty A_n.$$

„⇒“: Da μ nach Satz 2.11 ii) von unten stetig ist, folgt aus der Isotonie $A_1 \subset A_2 \subset \dots$

$$\mu(N) = \mu\Big(\lim_{n\to\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \ .$$

Wir zeigen nun, dass $\mu(A_n) = 0$ für alle $n{\in}\mathbb{N}$ gilt. Aus $f \geqslant \mathbb{1}_{A_n}{\cdot}f$ folgt

$$0 = \int_\Omega f \, d\mu \geqslant \int_\Omega \mathbb{1}_{A_n}{\cdot}f \, d\mu = \int_{A_n} f \, d\mu \ .$$

und wegen $f(\omega){>}\frac{1}{n}$ für alle $\omega{\in}A_n$ ergibt sich

$$\int_{A_n} f \, d\mu \ \geqslant \int_{A_n} \frac{1}{n} \, d\mu \ = \ \frac{1}{n}{\cdot}\mu(A_n) \ \geqslant 0 \ .$$

Also gilt $0 \geqslant \frac{1}{n}{\cdot}\mu(A_n) \geqslant 0$, d.h. $\mu(A_n) = 0$.

„⇐“: Sei umgekehrt $\mu(N) = 0$. Offensichtlich gilt $f \leqslant \infty{\cdot}\mathbb{1}_N$ und mit Satz 4.21 b) folgt

$$0 \ \leqslant \ \int_\Omega f \, d\mu \ \leqslant \ \int_\Omega \infty{\cdot}\mathbb{1}_N \, d\mu \ = \ \infty{\cdot}\mu(N) \ = \ 0$$ ■

Da nach Satz 4.27 Integrierbarkeit und Integral einer Funktion f unempfindlich gegenüber messbaren Änderungen von f auf Nullmengen sind, ergeben sich nunmehr leichte Verschärfungen früherer Aussagen.

Satz 4.28

a) Sind $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^\star$ quasiintegrierbar und $f \leqslant g$ μ-fast überall, so gilt

$$\int_\Omega f d\mu \leqslant \int_\Omega g d\mu.$$

Ist insbesondere $f = g$ μ-fast überall, so gilt

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega g d\mu.$$

b) Sind $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^\star$ messbar, f integrierbar und $f \leqslant g$ μ-fast überall, so ist g quasiintegrierbar und

$$\int_\Omega f d\mu \leqslant \int_\Omega g d\mu.$$

Ist insbesondere $f = g$ μ-fast überall, so ist g integrierbar und

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega g d\mu.$$

❑

Beweis:

a) Nach Voraussetzung ist $N := \{f>g\}$ messbar mit $\mu(N)=0$. Daher ist die nichtnegative messbare Funktion $f^+ \cdot \mathbb{1}_N \in \mathfrak{M}^+$ fast überall 0. Wegen $f^+ \cdot \mathbb{1}_{\complement N} \leqslant g^+$ folgt:

$$\int_\Omega f^+ d\mu = \int_\Omega (f^+ \cdot \mathbb{1}_N + f^+ \cdot \mathbb{1}_{\complement N}) d\mu \overset{4.21\text{ d)}}{=} \int_\Omega f^+ \cdot \mathbb{1}_{\complement N} d\mu \overset{4.15\text{ c)}}{\leqslant} \int_\Omega g^+ d\mu$$

Ebenso ist $\int_\Omega f^- d\mu \geqslant \int_\Omega g^- d\mu$, und es folgt a).

b) Aus $f \leqslant g$ μ-fast überall folgt $f^+ \leqslant g^+$ μ-fast überall und $f^- \geqslant g^-$ μ-fast überall. Da f^- integrierbar ist, ist auch g^- integrierbar, d.h. g ist quasiintegrierbar und

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu \leqslant \int_\Omega g^+ d\mu - \int_\Omega g^- d\mu = \int_\Omega g d\mu.$$

■

Satz 4.29

Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^\star$ sei messbar, und es gebe eine integrierbare numerische Funktion $g \in \mathfrak{M}^+$ mit $|f| \leqslant g$ μ-fast überall. Dann ist auch f integrierbar. ❑

Beweis:

f^+ und f^- sind als nichtnegative Funktionen quasiintegrierbar und daher nach Satz 4.28 a) integrierbar.

■

Satz 4.30
Sind $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^\star$ integrierbar und

$$\int_A f d\mu \leqslant \int_A g d\mu \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{A},$$

so ist $f \leqslant g$ μ-fast überall. Gilt insbesondere das Gleichheitszeichen

$$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{A},$$

so ist $f = g$ μ-fast überall. ❑

Beweis:
$M := \{f > g\}$ und $M_n := \{f > g + \frac{1}{n}\}$ sind messbar ($n{\in}\mathbb{N}$) und Definition 4.24 liefert

$$\int_{M_n} f d\mu \geqslant \int_{M_n} \left(g + \frac{1}{n}\right) d\mu = \int_{M_n} g d\mu + \frac{1}{n} \cdot \mu(M_n) \geqslant \int_{M_n} f d\mu + \frac{1}{n} \cdot \mu(M_n).$$

Wegen $\int_{M_n} f d\mu \in \mathbb{R}$ folgt daher $\mu(M_n) = 0$. Aus $M_n \uparrow M$ ergibt sich dann $\mu(M) = 0$. ■

Satz 4.31
Ist μ σ-endlich und gilt für die quasiintegrierbaren Funktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^\star$

$$\int_A f d\mu \leqslant \int_A g d\mu \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{A},$$

so ist $f \leqslant g$ μ-fast überall. Gilt speziell die Gleichheit für alle $A{\in}\mathfrak{A}$, so ist $f = g$ μ-f.ü.. ❑

Beweis:
Aus Symmetriegründen kann angenommen werden, dass f^- integrierbar ist. Wegen

$$-\infty \ < \ \int_\Omega f \ d\mu \ \leqslant \ \int_\Omega g \ d\mu$$

ist dann auch g^- integrierbar. Wegen der σ-Endlichkeit, existiert eine Folge messbarer Mengen B_n mit $\mu(B_n) < \infty$ und $B_n \uparrow \Omega$. Definiert man $A_n := B_n \cap \{g{\leqslant}n\}$, so gilt $A_n{\in}\mathfrak{A}$, $\mu(A_n){<}\infty$ und $A_n \uparrow \{g{<}\infty\}$. Ferner sind $g^+_{|A_n}$ beschränkt und g^- integrierbar, also ist $g \cdot \mathbb{1}_{A_n}$ integrierbar. Für alle $B{\in}\mathfrak{A}$ folgt nun:

$$-\infty < \int_B f \cdot \mathbb{1}_{A_n} d\mu \leqslant \int_B g \cdot \mathbb{1}_{A_n} d\mu < \infty.$$

Insbesondere ($B = \Omega$) ist auch $f \cdot \mathbb{1}_{A_n}$ integrierbar, und Satz 4.30 ergibt:

$$f \cdot \mathbb{1}_{A_n} \leqslant g \cdot \mathbb{1}_{A_n} \ \mu\text{-fast überall.}$$

Für $E{:=}\{g{<}\infty\}$ gilt daher $f{\cdot}\mathbb{1}_E \leqslant g{\cdot}\mathbb{1}_E$ μ-f.ü. und wegen $g_{|\complement E}{=}\infty$ folgt $f \leqslant g$ μ-f.ü.. ■

Satz 4.32
Jede μ-integrierbare numerische Funktion f auf Ω ist reellwertig μ-fast überall auf Ω. Ferner besitzt die Menge $\{f{\neq}0\}$ stets σ-endliches Maß, d.h. es gilt $\{f{\neq}0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ mit $A_n \in \mathfrak{A}$ und $\mu(A_n) < \infty$. ❑

Beweis:
Sei $N := \{|f|{=}{+}\infty\}$. Dann gilt $\alpha{\cdot}\mathbb{1}_N \leqslant |f|$ für jedes $\alpha{\geqslant}0$ und somit

$$\alpha{\cdot}\mu(N) \;\leqslant\; \int_\Omega |f| d\mu \;<\; +\infty\ .$$

Hieraus folgt $\mu(N){=}0$. Für den Beweis des zweiten Teils kann $f{\geqslant}0$ angenommen werden, da man zu $|f|$ übergehen kann. Es gilt dann

$$\{f{\neq}0\} = \{f{>}0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{f{\geqslant}\tfrac{1}{n}\right\}.$$

Für jede der Mengen $A_n := \{f{\geqslant}\frac{1}{n}\} = \{n{\cdot}f{\geqslant}1\}$ gilt nach Definition $\mathbb{1}_{A_n} \leqslant n{\cdot}f$ und somit

$$\mu(A_n) \;\leqslant\; n{\cdot}\int_\Omega f d\mu \;<\; +\infty.$$

■

Definition 4.33
Eine μ-fast überall auf Ω definierte, $\mathfrak{A}$-messbare, numerische Funktion f heißt *μ-integrierbar*, wenn sie zu einer μ-integrierbaren, auf ganz Ω definierten Funktion $\tilde{f}$ fortgesetzt werden kann. $\int \tilde{f} d\mu$ heißt dann das *μ-Integral* von f. Es wird auch mit $\int f d\mu$ bezeichnet. ❐

Satz 4.34 (Majorisierte Konvergenz)
Die Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^\star$ seien messbar und es gelte μ-f.ü. $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Weiter gebe es eine integrierbare Funktion g, so dass μ-f.ü. $|f_n| \leqslant g$ für alle $n{\in}\mathbb{N}$ gilt. Dann sind f und alle f_n integrierbar, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| d\mu = 0$$

❑

Beweis:
Nach Satz 4.29 sind f und alle f_n integrierbar. Nach Satz 4.32 können wir außerdem annehmen, dass f, g und alle f_n reellwertig sind und dass überall gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f, \quad |f_n| \leqslant g$$

Die messbaren Funktionen $g_n := |f| + g - |f_n{-}f|$ sind nichtnegativ, denn es gilt:

$$g_n \;=\; |f| + g - |f_n{-}f| \;\geqslant\; |f| + g - (|f_n|{+}|f|) \;=\; g - |f_n| \;\geqslant\; 0$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n - f| = \liminf_{n\to\infty} |f_n - f| = 0$ liefert das Lemma von Fatou 4.18:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Big(|f|+g\Big)\, d\mu &= \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} g_n \, d\mu \\
&\overset{\text{Fatou}}{\leqslant} \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \, d\mu \\
&= \int_\Omega \Big(|f|+g\Big)\, d\mu \;+\; \liminf_{n\to\infty} \Big(-\int_\Omega |f_n - f| \, d\mu\Big) \\
&= \int_\Omega \Big(|f|+g\Big)\, d\mu \;-\; \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| \, d\mu
\end{aligned}$$

Da $\int_\Omega (|f|+g)\, d\mu$ endlich ist, muss $\limsup\limits_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|\, d\mu$ als nichtnegative Größe endlich und damit gleich Null sein. Insbesondere folgt daher $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|\, d\mu = 0$. Wegen

$$\left| \int_\Omega f_n d\mu - \int_\Omega f d\mu \right| = \left| \int_\Omega (f_n - f)\, d\mu \right| \leqslant \int_\Omega |f_n - f|\, d\mu$$

ergibt sich schließlich die noch fehlende Behauptung. ∎

Bemerkung 4.35

Ohne die Voraussetzung einer integrierbaren oberen Schranke g wird Satz 4.16 falsch. Man betrachte hierzu als Beispiel den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1, \lambda)$ mit der Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^\infty$

$$f_n(x) := n^2 \cdot \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$$

Die Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^\infty$ konvergiert auf $\mathbb{R}$ offensichtlich gegen 0, aber wegen

$$\int_\mathbb{R} f_n d\lambda = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 dx = \Big[n^2 \cdot x\Big]_0^{\frac{1}{n}} = n$$

konvergiert die Folge der Integrale nicht gegen 0 sondern gegen ∞, d.h. es gilt

$$\infty = \lim_{n\to\infty} \int_\mathbb{R} f_n d\lambda \neq \int_\mathbb{R} \lim_{n\to\infty} f_n d\lambda = 0$$

❐

4.4. Der Satz von Radon-Nikodym

Definition 4.36

Eine Familie $\mathcal{P} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ disjunkter Mengen $A_1, \ldots, A_m \in \mathfrak{A}$ mit $\bigcup\limits_{j=1}^m A_j = \Omega$ heißt *messbare Partition* von Ω. Die messbare Partition $\mathcal{Q} = \{B_1, \ldots, B_n\}$ heißt Verfeinerung der Partition $\mathcal{P}$, falls jedes B_k in einem A_j enthalten ist. In diesem Fall bilden die in A_j enthaltenen B_ℓ eine messbare Partition von A_j. Zu je zwei messbaren $\mathcal{P} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ und $\mathcal{Q} = \{B_1, \ldots, B_n\}$ existiert eine *gröbste gemeinsame Verfeinerung*, nämlich das Mengensystem $\{A_j \cap B_k : j=1, \ldots, m;\ k=1, \ldots, n\}$. ❐

Wir benötigen folgendes Ergebnis.

Satz 4.37 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)
Sind f, g messbare Funktionen auf dem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, so gilt:

$$\int_\Omega |fg| d\mu \leqslant \Big[\int_\Omega |f|^2 d\mu\Big]^{\frac{1}{2}} \cdot \Big[\int_\Omega |g|^2 d\mu\Big]^{\frac{1}{2}}$$ ❑

Beweis:
O.B.d.A. gelte $\int_\Omega |f|^2 d\mu < \infty$ und $\int_\Omega |g|^2 d\mu < \infty$. Außerdem kann $[\int_\Omega |f|^2 d\mu]^{\frac{1}{2}} \neq 0$ und $[\int_\Omega |g|^2 d\mu]^{\frac{1}{2}} \neq 0$ angenommen werden, da für $[\int_\Omega |f|^2 d\mu]^{\frac{1}{2}} = 0$ oder $[\int_\Omega |g|^2 d\mu]^{\frac{1}{2}} = 0$ nach Satz 4.27 $f \cdot g = 0$ μ-f.ü. folgt und die Behauptung dann ebenfalls richtig ist.
Setzt man nun in der für alle $x, y \in [0, \infty]$ offensichtlich geltenden Ungleichung

$$x \cdot y \leqslant \tfrac{1}{2} \cdot x^2 + \tfrac{1}{2} \cdot y^2.$$

x durch $\dfrac{|f|}{[\int_\Omega |f|^2 d\mu]^{\frac{1}{2}}}$ und y durch $\dfrac{|g|}{[\int_\Omega |g|^2 d\mu]^{\frac{1}{2}}}$ und integriert über Ω, folgt die Behauptung

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega |fg| \, d\mu}{\Big[\displaystyle\int_\Omega |f|^2 d\mu\Big]^{\frac{1}{2}} \Big[\displaystyle\int_\Omega |g|^2 d\mu\Big]^{\frac{1}{2}}} \leqslant 1 .$$ ■

Bemerkung 4.38
Verwendet man im Beweis des letzten Satzes die für $p, q \in [1, \infty]$ mit $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ und für alle $x, y \in [0, \infty]$ gültige Ungleichung

$$x \cdot y \leqslant \tfrac{1}{p} \cdot x^p + \tfrac{1}{q} \cdot y^q,$$

erhält man die *Höldersche Ungleichung*

$$\int_\Omega |fg| \, d\mu \leqslant \Big[\int_\Omega |f|^p d\mu\Big]^{\frac{1}{p}} \Big[\int_\Omega |g|^q d\mu\Big]^{\frac{1}{q}}.$$ ❒

Ist h eine messbare Funktion auf dem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, so wird auf Grund der Integralrechenregeln durch

$$\eta(A) := \int_A h(\omega) d\mu(\omega)$$

ein Maß definiert. Dieser Sachverhalt wird in verkürzter Form durch $\eta = h \cdot \mu$ dargestellt (siehe hierzu auch Bemerkung 4.40). Insbesondere gilt in diesem Fall[5]

$$\int_A f d\eta = \int_A f \cdot h \, d\mu \,. \tag{4.3}$$

Der Satz von Radon-Nikodym versucht, diese Aussage umzukehren, d.h. zu vorgegebenen Maßen η und μ eine messbare Funktion h mit $\eta = h \cdot \mu$ zu finden. Der folgende Satz stellt zunächst eine einfache Version zur Verfügung.

[5]Da f durch Treppenfunktionen approximiert werden kann, genügt es wie bei allen Integralaussagen, Gleichung (4.3) für Indikatorfunktionen nachzuweisen!

Satz 4.39
Seien η und μ positive Maße auf dem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A})$ mit

i) $\mu(\Omega) < \infty$ und

ii) $\forall A \in \mathfrak{A} : \eta(A) \leqslant \mu(A)$.

Dann existiert eine $\mathfrak{A}$-messbare Funktion h auf Ω mit $0 \leqslant h \leqslant 1$, so dass gilt:

$$\forall A \in \mathfrak{A} : \eta(A) = \int_A h d\mu.$$

Insbesondere gilt für alle messbaren Funktionen f:

$$\forall A \in \mathfrak{A} : \int_A f d\eta = \int_A f \cdot h d\mu.$$

❑

Beweis:
Ersetzt man μ durch $\frac{\mu}{\mu(\Omega)}$, kann zunächst O.B.d.A. angenommen werden, dass $\mu(\Omega) = 1$ gilt. Für jede endliche $\mathfrak{A}$-messbare Partition $\mathcal{P} = \{A_1, \dots, A_n\}$ von Ω sei die Elementarfunktion $0 \leqslant h_{\mathcal{P}} \leqslant 1$ definiert durch

$$h_{\mathcal{P}}(x) := \begin{cases} \frac{\eta(A_k)}{\mu(A_k)} & \text{falls} \quad x \in A_k \quad \text{und} \quad \mu(A_k) > 0 \\ 0 & \text{falls} \quad x \in A_k \quad \text{und} \quad \mu(A_k) = 0 \end{cases}$$

$h_{\mathcal{P}}$ „misst“ die „Dichte“ von η bzgl. μ in Bezug auf die Partition $\mathcal{P}$.
Ist $I \subset \{1, 2, \dots n\}$ eine Indexmenge und $A = \biguplus_{k \in I} A_k$, so folgt aus dieser Definition die Eigenschaft $\eta(A) = \int_A h_{\mathcal{P}} d\mu$, sowie insbesondere $\eta(\Omega) = \int_\Omega h_{\mathcal{P}} d\mu$.
Sei nun $\mathcal{Q}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{P}$. Dann gilt insbesondere

$$\forall A \in \mathcal{P} : \int_A h_{\mathcal{Q}} d\mu = \eta(A) = \int_A h_{\mathcal{P}} d\mu \tag{4.4}$$

und da $h_{\mathcal{P}}$ auf den Mengen von $\mathcal{P}$ konstant ist, folgt:

$$\forall A \in \mathcal{P} : \int_A h_{\mathcal{P}} h_{\mathcal{Q}} d\mu = \int_A h_{\mathcal{P}}^2 d\mu \tag{4.5}$$

Nach Anwendung der Binomischen Formel und Rechenregeln für die Addition von Integralen erhält man daher:

$$\int_A h_{\mathcal{Q}}^2 d\mu = \int_A \Big(h_{\mathcal{Q}}^2 \overbrace{- 2 h_{\mathcal{P}} h_{\mathcal{Q}} + 2 h_{\mathcal{P}}^2}^{=0} \Big) d\mu = \int_A (h_{\mathcal{Q}} - h_{\mathcal{P}})^2 d\mu + \int_A h_{\mathcal{P}}^2 d\mu \geqslant \int_A h_{\mathcal{P}}^2 d\mu \tag{4.6}$$

Konstruktion der Funktion h

Wir definieren zunächst

$$c := \sup_{\mathcal{P}} \int_\Omega h_{\mathcal{P}}^2 d\mu.$$

Wegen $\mu(\Omega) = 1$ gilt $0 \leqslant c \leqslant 1$. Nach Definition des Supremums existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine endliche $\mathfrak{A}$-messbare Partition $\mathcal{P}_n$ von Ω, so dass

$$\int_\Omega h_{\mathcal{P}_n}^2 d\mu \;\geqslant\; c - \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Für jedes $n = 1, 2 \ldots$ sei $\mathcal{Q}_n$ sei die gröbste gemeinsame Verfeinerung der Partitionen $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$. Also gilt für alle $n \geqslant 1$:

$$c - \left(\frac{1}{4}\right)^n \;\leqslant\; \int_\Omega h_{\mathcal{P}_n}^2 d\mu \overset{(4.6)}{\leqslant} \int_\Omega h_{\mathcal{Q}_n}^2 d\mu \overset{(4.6)}{\leqslant} \int_\Omega h_{\mathcal{Q}_{n+1}}^2 d\mu \;\leqslant\; c$$

Also gilt nach Gleichung (4.5)

$$\int_\Omega (h_{\mathcal{Q}_{n+1}} - h_{\mathcal{Q}_n})^2 d\mu \overset{(4.5)}{=} \int_\Omega h_{\mathcal{Q}_{n+1}}^2 d\mu \;-\; \int_\Omega h_{\mathcal{Q}_n}^2 d\mu \;\leqslant\; \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz folgt daher mit $f = h_{\mathcal{Q}_{n+1}} - h_{\mathcal{Q}_n}$ und $g = 1$:

$$\int_\Omega |h_{\mathcal{Q}_{n+1}} - h_{\mathcal{Q}_n}| d\mu \;\leqslant\; \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Also gilt nach Folgerung 4.18

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{\infty} |h_{\mathcal{Q}_{n+1}} - h_{\mathcal{Q}_n}| \right) d\mu < \infty,$$

woraus nach Satz 4.32 folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |h_{\mathcal{Q}_{n+1}} - h_{\mathcal{Q}_n}| < \infty \quad \mu\text{-f.ü.}.$$

Ist $n > m$, so ergibt sich daher

$$|h_{\mathcal{Q}_n} - h_{\mathcal{Q}_m}| = \left| \sum_{k=m}^{n-1} (h_{\mathcal{Q}_{k+1}} - h_{\mathcal{Q}_k}) \right| \;\leqslant\; \sum_{k=m}^{n-1} |h_{\mathcal{Q}_{k+1}} - h_{\mathcal{Q}_k}|$$

Da die rechte Seite der Ungleichung μ-f.ü. für $m \to \infty$ gegen 0 konvergiert, ist $h_{\mathcal{Q}_n}$ eine Cauchy-Folge μ-f.ü., so dass der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} h_{\mathcal{Q}_n}$ μ-f.ü. existiert. Wir definieren nun die Funktion h durch:

$$h(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} h_{\mathcal{Q}_n}(x) & \text{falls der Grenzwert existiert,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Überprüfung der gewünschten Eigenschaften von *h*

h ist als Grenzwert messbarer Funktionen wieder $\mathfrak{A}$-messbar und wegen $0 \leqslant h_{\mathcal{P}} \leqslant 1$ gilt auch $0 \leqslant h \leqslant 1$. Es bleibt also noch die Eigenschaft $\eta(A) = \int_A h d\mu$ zu beweisen.
Sei $A \in \mathfrak{A}$ beliebig aber fest. Für jedes $n = 1, 2, \ldots$ sei $\mathscr{R}_n$ die gröbste gemeinsame Verfeinerung der Partitionen $\mathcal{Q}_n$ und $\{A, \complement A\}$. Für jedes $n \geqslant 1$ gilt dann

$$c - \left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant \int_\Omega h_{\mathcal{Q}_n}^2 d\mu \leqslant \int_\Omega h_{\mathscr{R}_n}^2 d\mu \leqslant c$$

und daher wie vorher

$$\int_\Omega (h_{\mathscr{R}_n} - h_{\mathcal{Q}_n})^2 d\mu \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt daher für $n \geqslant 1$:

$$\left|\int_A (h_{\mathscr{R}_n} - h_{\mathcal{Q}_n}) d\mu\right| \leqslant \int_A |h_{\mathscr{R}_n} - h_{\mathcal{Q}_n}| d\mu \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

d.h. es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_A (h_{\mathscr{R}_n} - h_{\mathcal{Q}_n}) d\mu = 0.$$

Da nach Gleichung (4.4) nun aber

$$\eta(A) = \int_A h_{\mathscr{R}_n} d\mu = \int_A (h_{\mathscr{R}_n} - h_{\mathcal{Q}_n}) d\mu + \int_A h_{\mathcal{Q}_n} d\mu$$

gilt, folgt nach Definition von h und dem Satz über dominierte Konvergenz 4.34

$$\eta(A) = \lim_{n\to\infty} \int_A h_{\mathscr{R}_n} d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A h_{\mathcal{Q}_n} d\mu = \int_A h d\mu.$$

■

Bemerkung 4.40

Oft schreibt man $\eta = h \cdot \mu$ und nennt h die *Dichte von* η *bzgl.* μ. Aufgrund der Konstruktion nennt man h auch die *Radon-Nikodym-Ableitung* und schreibt in diesem Fall $h = \frac{d\eta}{d\mu}$. ❐

Die Standardform des Satzes von Radon-Nikodym kann nun leicht bewiesen werden.

Satz 4.41 (Radon-Nikodym)

Seien η und μ positive Maße auf dem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A})$ mit

i) $0 < \mu(\Omega) < \infty$ und $0 < \eta(\Omega) < \infty$

ii) η ist *absolut stetig* bzgl. μ (Schreibweise: $\eta \ll \mu$), d.h. es gilt

$$\forall A \in \mathfrak{A} : \mu(A) = 0 \Longrightarrow \eta(A) = 0 .$$

Dann existiert eine nichtnegative $\mathfrak{A}$-messbare Funktion h auf Ω, so dass gilt:

$$\forall A{\in}\mathfrak{A} : \eta(A) = \int_A h \; d\mu.$$

Insbesondere gilt für alle messbaren Funktionen f:

$$\int f \; d\eta = \int f{\cdot}h \; d\mu.$$

❑

Beweis:

Nach Satz 4.39 existieren die Radon-Nikodym-Ableitungen

$$h_\eta := \frac{d\eta}{d(\eta{+}\mu)} \quad \text{und} \quad h_\mu := \frac{d\mu}{d(\eta{+}\mu)}.$$

Definiert man $N := \{h_\mu{\neq}0\}$ und

$$h(x) := \begin{cases} \frac{h_\eta(x)}{h_\mu(x)} & \text{falls} \quad x \in N \\ 0 & \text{falls} \quad x \in \complement N \end{cases}$$

so hat h die gewünschten Eigenschaften. Da h_μ nämlich auf $\complement N$ gleich 0 ist, folgt

$$\mu(\complement N) = \int\limits_{\complement N} h_\mu \; d(\eta{+}\mu) = 0$$

und daher $\eta(\complement N) = 0$ wegen $\eta \ll \mu$. Damit ergibt sich für alle $A \in \mathfrak{A}$:

$$\eta(A) = \eta(A{\cap}N) = \int\limits_{A\cap N} \overbrace{h_\eta}^{h\cdot h_\mu} d(\eta{+}\mu) = \int\limits_{A\cap N} h{\cdot}\underbrace{h_\mu \; d(\eta{+}\mu)}_{d\mu} = \int\limits_{A\cap N} h \; d\mu = \int_A h \; d\mu$$

■

5. Literatur

Bauer, H. (1990): Maß- und Integrationstheorie. Walter de Gruyter, Berlin - New York

Behrends, E. (1987): Maß- und Integrationstheorie. Springer, Berlin

Cohn, D.L. (1980): Measure Theory. Birkhäuser, Stuttgart.

Elstrodt, J. (1996): Maß- und Integrationstheorie. Springer, Berlin

Fleming, W.H. (1977): Functions of Several Variables. Springer, New-York.

Floret, K. (1981): Maß- und Integrationstheorie. Teubner, Stuttgart

Hackenbroch, W. (1987): Integrationstheorie. Teubner, Stuttgart

Halmos, P.R. (1974): Measure Theory. Springer, New-York.

Kelly, J.L./Srinivasan, T.P. (1988): Measure and Integral. Springer, New-York.

Lang, S. (1969): Real Analysis. Addison-Wesley, Reading (Mass.)

Leinert, M. (1995): Integration und Maß. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden

Rudin, W. (1974): Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, New York

Rudin, W. (1980): Analysis. Physik-Verlag, Weinheim

Schindler, K. (2005): Mathematik für Ökonomen. DUV, Wiesbaden (5. Auflage)

A. Arithmetik in $[-\infty, +\infty]$

Im Bereich der gesamten Maß- und Integrationstheorie wird man unweigerlich auf die formale Größe ∞ treffen. Einer der Gründe dafür ist, dass man über Mengen mit unendlichem Maß integrieren möchte, beispielsweise über die reelle Zahlenachse, die die Länge unendlich besitzt.
Ein weiterer Grund besteht darin, dass – auch wenn man nur mit reellwertigen Funktionen arbeitet – der Grenzwert einer Funktionenfolge eine Funktion liefern kann, die an bestimmten Stellen formal den Wert unendlich annimmt, man spricht dann von nummerischen Funktionen.
Viele maßtheoretische Sätze, die ansonsten durch die erforderlichen Fallunterscheidungen relativ schwerfällig wirken würden, gewinnen durch die Verwendung nummerischer Funktionen eine große Eleganz.
Auf der erweiterten reellen Zahlenachse

$$\mathbb{R}^\star = [-\infty, +\infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

verwenden wir noch folgende erweiterte Rechenregeln.
Für die Addition

$$a \pm \infty \;\;=\;\; \pm\infty + a \;\;=\;\; \pm\infty \quad \text{für} \quad a \in \mathbb{R}$$

Für die Multiplikation

$$a \cdot (\pm\infty) \;\;=\;\; (\pm\infty) \cdot a \;\;=\;\; \begin{cases} \pm\infty & \text{für} \quad 0 < a \leqslant \infty \\ \mp\infty & \text{für} \quad -\infty \leqslant a < 0 \\ 0 & \text{für} \qquad a = 0 \end{cases}$$

Nicht generell üblich aber typisch für die Maßtheorie ist die Konvention $(\pm\infty) \cdot 0 = 0$.
Zu beachten ist, dass algebraische Umformungen in $\mathbb{R}^\star$ mit Vorsicht behandelt werden müssen. Z.B. gilt die Kürzungsregel

$$a + b = a + c \Longrightarrow b = c$$

nur im Fall $|a| \neq \infty$. Analog hierzu gilt

$$a \cdot b = a \cdot c \Longrightarrow b = c$$

nur im Fall $0 < |a| < \infty$.

Die in $\mathbb{R}$ erklärte Ordnungsrelation $<$ wird auf $\mathbb{R}^\star$ ausgedehnt durch die Festsetzung

$$\forall a \in \mathbb{R} : -\infty < a < +\infty \ .$$

Analog zu den Notationen $\mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_+$ verwenden wir die Notation

$$\mathbb{R}_+^* = [0, +\infty] := \{x \in \mathbb{R}^\star \mid 0 \leqslant x\}$$

B. Mengen

Wesentliches Anliegen der Maßtheorie ist vereinfacht ausgedrückt, eine allgemeine Theorie aufzustellen, die es gestattet, die „Bedeutung“ oder „Größe“ von Mengen zu charakterisieren. Eine der elementarsten Möglichkeiten, dies zu messen, besteht in der Angabe der Zahl der Elemente, was zunächst allerdings nur für endliche Mengen funktioniert. Der „Erfinder“ der Mengenlehre G.Cantor hat diesen Zahlbegriff verallgemeinert und gezeigt, dass die Größe unendlicher Mengen sich analog durch ihre *Kardinalzahl* messen lässt.
Die Idee zur Verallgemeinerung des Zahlbegriffes liefert der folgende einfache Satz.

Satz B.1

a) Eine Menge E heißt endlich, wenn es eine natürliche Zahl n und eine bijektive Abbildung $f : \{1, 2, \dots, n\} \to E$ gibt. n heißt die Anzahl der Elemente von E.

b) Zwei endliche Mengen M und N haben genau dann die gleiche Zahl von Elementen, wenn es eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ gibt. ❑

Definition B.2

Zwei Mengen M und N haben die gleiche *Kardinalzahl* (*Mächtigkeit*, *Kardinalität*) bzw. sind *gleich mächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung von M nach N gibt. Man schreibt $Card(M) = Card(N)$ oder $|M| = |N|$. ❒

Bemerkung B.3

i) Durch

$$M \sim N \quad :\Longleftrightarrow \quad M \text{ ist von gleicher Mächtigkeit wie } N$$

wird eine Äquivalenzrelation[1] definiert. Die Kardinalzahl der Menge M ist dann formal definiert als die Äquivalenzklasse $[M]$ bezüglich dieser Relation $\sim$.

Endliche Kardinalzahlen bezeichnen wir mit den natürlichen Zahlen

$$0, 1, 2, \dots, n, n+1, \dots,$$

[1]Zum Begriff Äquivalenzrelation siehe Definition C.1.

wobei n angibt, wie viele Elemente die Menge enthält. Die unendlichen Kardinalzahlen werden mit

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$$

notiert[2]. Hierbei bezeichnet $\aleph_0$ die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen.

ii) Eine Menge M ist genau dann unendlich, wenn es eine bijektive Abbildung von M auf eine echte Teilmenge $M' \subsetneq M$ gibt (siehe nachfolgendes Beispiel B.5). Eine Menge ist genau dann endlich, wenn sie nicht unendlich ist. ❐

Für unsere Zwecke genügt es, zwei Typen von unendlichen Mengen zu unterscheiden.

Definition B.4

Eine Menge M heißt *abzählbar* oder *abzählbar unendlich*, wenn ihre Mächtigkeit gleich $\aleph_0$ ist, d.h. wenn es eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ gibt. Eine nicht endliche und nicht abzählbare Menge heißt *überabzählbar* oder *überabzählbar unendlich.* ❐

Das folgende für Nichtmathematiker i.d.R. verblüffende Beispiel zeigt, dass die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ die gleiche Mächtigkeit $\aleph_0$ haben und dass die Unendlichkeit einige gewöhnungsbedürftige Eigenschaften aufweist[3].

Beispiel B.5

i) Die Menge der geraden natürlichen Zahlen ist gleichmächtig zur Menge $\mathbb{N}$ selbst. (Beweis als Übung)

ii) Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist gleichmächtig zur Menge $\mathbb{N}$. (Beweis als Übung)

iii) Die Menge $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ist gleichmächtig zur Menge $\mathbb{N}$.

Beweis:

Wir zeigen, dass die Funktion $j : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ definiert durch $j(m, n) := 2^m \cdot (2n+1)$ bijektiv ist.

(1) Seien $(m, n); (m', n') \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit $j(m, n) = j(m', n')$, d.h. es gilt

$$2^m(2n+1) = 2^{m'}(2n'+1)$$

O.B.d.A. kann $m \geqslant m'$ angenommen werden. Multiplikation mit $2^{-m'}$ liefert

$$2^{m-m'}(2n+1) = 2n'+1$$

Da die rechte Seite der letzten Gleichung ungerade ist, muss dies auch für die linke Seite gelten. Dies ist jedoch nur zu erfüllen, wenn $2^{m-m'}{=}1 \iff m = m'$ und damit auch $n{=}n'$ gilt. j ist somit injektiv.

[2] $\aleph$ bezeichnet den hebräischen Buchstaben „aleph“.

[3] Dass diese Eigenschaften paradox erscheinen, dürfte vor allem daran liegen, dass die „Unendlichkeit“ in der Natur real nicht vorkommt.

(2) Sei $x \in \mathbb{N}$. Wählt man die größte Zahl $m \in \mathbb{N}_0$, so dass 2^m ein Teiler von x ist (beachte: $2^0=1$ ist immer ein Teiler von x und $m \leqslant \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$), gilt

$$x = 2^m \cdot u$$

u muss ungerade sein, da sonst 2^{m+1} ein Teiler von x wäre, im Widerspruch zur Maximalität von m. Damit gilt $u = 2n+1$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}_0$, woraus folgt:

$$x = 2^m \cdot (2n+1)$$

■

Der folgende alternative (jedoch nicht ganz triviale) Beweis verwendet das Cantorsche Diagonalisierungsverfahren und zeigt, dass $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}_0$ gleichmächtig sind.

Beweis:

Wir zeigen, dass die Funktion[4]

$$\begin{array}{rccl} \pi : & \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{N}_0 \\ & (x, y) & \mapsto & \frac{1}{2} \cdot (x+y) \cdot (x+y+1) + y \end{array}$$

bijektiv ist[5]

Hierzu verwenden wir die beiden Hilfsfunktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, definiert durch

$$f(x) := \tfrac{1}{2} \cdot x \cdot (x+1) \qquad \text{und} \qquad g(z) := \max\{x \in \mathbb{N}_0 \mid f(x) \leqslant z\}$$

Insbesondere gilt dann

$$\pi(x, y) = f(x+y) + y \tag{B.1}$$

Wir zeigen nun, dass die Funktion $P : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$P(n) := \Big(g(n) - n + f(g(n)) \ , \ n - f(g(n)) \Big)$$

die Inverse der Funktion π ist.

Die Eigenschaft $\pi \circ P = \mathrm{id}_{\mathbb{N}_0}$ folgt direkt aus der Definition von P, denn es gilt:

$$\begin{array}{rcl} (\pi \circ P)(n) & = & \pi\Big(\overbrace{g(n) - n + f(g(n))}^{x} \ , \ \overbrace{n - f(g(n))}^{y} \Big) \\ & \stackrel{(B.1)}{=} & f(\overbrace{g(n)}^{x+y}) + \overbrace{n - f(g(n))}^{y} \\ & = & n \end{array}$$

[4] π heißt Cantorsche Paarungsfunktion.

[5] Eigentlich genügt die Injektivität, da offensichtlich $|\mathbb{N}_0| \leqslant |\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0|$ gilt.

Zum Nachweis von $P \circ \pi = \mathrm{id}_{\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0}$ beachte man, dass Gleichung (B.1) insbesondere

$$f(x+y) \leqslant \pi(x,y) < \pi(x,y) + (x+1) = \overbrace{f(x+y)+y}^{\pi(x,y)} + x+1 = f(x+y+1)$$

liefert, woraus insbesondere

$$g(\pi(x,y)) = x+y$$

folgt. Zusammen mit Gleichung (B.1) ergibt dies

$$\begin{aligned} (P \circ \pi)(x,y) &= P\Big(\pi(x,y)\Big) \\ &= \Big(\underbrace{g(\pi(x,y))}_{x+y} - \pi(x,y) + f\Big(\underbrace{g(\pi(x,y))}_{x+y}\Big), \pi(x,y) - f\Big(\underbrace{g(\pi(x,y))}_{x+y}\Big)\Big) \\ &= \Big((x+y)\underbrace{-\pi(x,y)+f(x+y)}_{-y}, \underbrace{\pi(x,y)-f(x+y)}_{y}\Big) \\ &= (x,y) \end{aligned}$$

■

iv) Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist gleichmächtig zur Menge $\mathbb{N}$.

Beweis:
Da $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}_0$ die gleiche Mächtigkeit haben, gilt nach Teil iii) auch $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{N}_0|$. Da außerdem jedes Element von $\mathbb{Q}$ in der Form $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$ darstellbar ist, gilt $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{N}_0|$. ■

v) Die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen ist wieder abzählbar.

Beweis:
Sei $\Big(M_i\Big)_{i=1}^{\infty}$ eine Folge abzählbarer Mengen. Dann gilt für jedes i

$$M_i = \{m_{i1}, m_{i2}, m_{i3}, \dots\}$$

woraus sich die die Surjektivität[6] der Abbildung

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \quad \text{mit} \quad f(x,y) := m_{x,y}$$

ergibt. Also ist die Mächtigkeit von $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ kleiner gleich[7] der Mächtigkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. ■

[6]Sind die Mengen M_i paarweise disjunkt, ist f sogar bijektiv.

[7]Ist f sogar bijektiv, sind die beiden Mengen gleichmächtig.

C. Ordnung und Konvergenz

Ziel dieses Abschnittes ist es, in Analogie zur Konvergenz reeller Folgen eine plausible Definition der Konvergenz von Mengenfolgen herzuleiten. Entscheidend hierbei ist, dass die Konvergenz in $\mathbb{R}$ alleine mit Hilfe der auf $\mathbb{R}$ gegebenen $\leqslant$-Ordnung definiert werden kann. Beachtet man nun, dass die Teilmengenbeziehung $\subset$ ebenfalls eine Ordnungsrelation ist, lässt sich die Konvergenz vollkommen analog auf Mengenfolgen übertragen (siehe Abschnitt C.3)[1]. Der Vollständigkeit halber geben wir zunächst nochmals die wichtigsten Begriffe aus dem Bereich der Ordnungstheorie an.

C.1. Ordnungsrelationen

Definition C.1

Sei $\mathscr{R} \subset X \times X$ eine Relation in der Menge X. $\mathscr{R}$ heißt

- *reflexiv*, wenn gilt $\forall x \in M : x \mathscr{R} x$
- *symmetrisch*, wenn gilt $\forall x, y \in M : \left[x \mathscr{R} y \Longrightarrow y \mathscr{R} x \right]$
- *antisymmetrisch*, wenn gilt $\forall x, y \in M : \left[x \mathscr{R} y \wedge y \mathscr{R} x \Longrightarrow x = y \right]$
- *transitiv*, wenn gilt $\forall x, y, z \in M : \left[x \mathscr{R} y \wedge y \mathscr{R} z \Longrightarrow x \mathscr{R} z \right]$
- *vollständig*, wenn gilt $\forall x, y \in M : \left[x \mathscr{R} y \vee y \mathscr{R} x \right]$
- *Äquivalenzrelation*, falls $\mathscr{R}$ reflexiv, reflexiv und transitiv ist.
- *Präferenzordnung*, falls $\mathscr{R}$ vollständig und transitiv ist.
- *Ordnung*, falls $\mathscr{R}$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.
- *Totalordnung*, falls $\mathscr{R}$ eine vollständige Ordnung ist. ❐

Beispiel C.2

i) Die „$\geqslant$“-Relation in $\mathbb{R}$ ist eine Totalordnung. Häufig schreibt man $y \leqslant x$ statt $x \geqslant y$.

---

[1] Diese Vorgehensweise wird als *Verbandstheorie* bezeichnet.

ii) Für $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ und $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ definieren wir

$$\boldsymbol{x}\mathscr{R}\boldsymbol{y} :\Longleftrightarrow \forall i{\in}\{1, \ldots, k\} : x_i \geqslant y_i \ .$$

$\mathscr{R}$ definiert eine Ordnung in $\mathbb{R}^k$, die man ebenfalls mit „$\geqslant$“ bezeichnet. Diese ist für $k{\geqslant}2$ jedoch *keine* Totalordnung.

iii) In jedem Mengensystem ist die Inklusion „$\subset$“ eine (nicht vollständige) Ordnung. ❐

Bemerkung C.3

i) Ordnungen werden meist mit „$\leqslant$“ oder „$\preccurlyeq$“ notiert und man spricht kurz von der geordneten Menge $(X, \leqslant)$ bzw. $(X, \preccurlyeq)$. Zusätzlich verwendet man die Symbole „$<$“ bzw. „$\prec$“ für die induzierten strikten Ordnungen, definiert durch

$$\begin{aligned} x < y &\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} (x \leqslant y) \wedge (x \neq y) \\ x \prec y &\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} (x \preccurlyeq y) \wedge (x \neq y) \end{aligned}$$

ii) Die Vollständigkeit einer Relation in einer Menge X impliziert die Reflexivität. Insbesondere ist eine Präferenzordnung auch reflexiv. ❐

Wesentliche mathematische Begriffe wie z.B. „Maximum“ oder „Minimum“, die im Bereich der Optimierung eine zentrale Rolle spielen, beruhen auf der Ordnungsrelation „$\geqslant$“.

Definition C.4

Sei B eine Teilmenge der geordneten Menge $(X, \leqslant)$.

a) Ein Element $s{\in}X$ heißt
   - *obere Schranke* von B, wenn gilt $\forall b \in B : b \leqslant s$.
   - *kleinste obere Schranke* oder *Supremum* von B (Schreibweise: $\sup B$), wenn s eine obere Schranke ist mit der Eigenschaft, dass jedes kleinere Element als s *keine* obere Schranke von B ist.
   - *Maximum* von B (Schreibweise: $\max B$), wenn $s = \sup B$ und $s \in B$ gilt.
   - *untere Schranke* von B, wenn gilt $\forall b \in B : s \leqslant b$.
   - *größte untere Schranke* oder *Infimum* von B (Schreibweise: $\inf B$), wenn s eine untere Schranke ist mit der Eigenschaft, dass jede echt größere Zahl als s *keine* untere Schranke von B ist.
   - *Minimum* von B (Schreibweise: $\min B$), wenn $s = \inf B$ und $s \in B$ gilt.

b) B heißt *nach oben* bzw. *unten beschränkt*, wenn eine obere bzw. untere Schranke für B existiert. B heißt *beschränkt*, wenn B nach oben und unten beschränkt ist. ❐

Bemerkung C.5
Das Maximum bzw. Minimum von endlich vielen Elementen $x_1, \ldots, x_m$ wird in der Verbandstheorie auch mit $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_m$ bzw. $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_m$ bezeichnet. ❒

Der Begriff der monotonen Funktion koppelt die Bezeichnungen Ordnung und Funktion.

Definition C.6
Sei $f : \mathbb{D} \to X$ eine Funktion zwischen den geordneten Mengen $(\mathbb{D}, \leqslant_{\mathbb{D}})$ und $(X, \leqslant_X)$.

- f heißt *isoton* oder *monoton wachsend*, wenn $u \leqslant_{\mathbb{D}} v \Longrightarrow f(u) \leqslant_X f(v)$ gilt.
- f heißt *antiton* oder *monoton fallend*, wenn $u \leqslant_{\mathbb{D}} v \Longrightarrow f(u) \geqslant_X f(v)$ gilt. ❒

Bemerkung C.7
Ist speziell $f : \mathbb{N} \to X$ eine Folge in der geordneten Menge $(X, \leqslant)$ (Kurznotation: $(f_k)_{k=1}^{\infty}$), so erhält man den Begriff der isotonen bzw. antitonen Folge.

- $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ heißt *isoton* oder *monoton wachsend*, wenn $f_i \leqslant f_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt.
- $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ heißt *antiton* oder *monoton fallend*, wenn $f_i \geqslant f_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. ❒

C.2. Zahlenfolgen

Ist $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ eine monotone reelle Zahlenfolge, ist die Konvergenz mehr oder minder intuitiv klar. Genauer erhält man folgende Aussage.

Satz C.8
Sei $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ eine monotone reelle Zahlenfolge. Dann existiert $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$ und es gilt[2]

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \left\{ \begin{matrix} \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} x_k \\ \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} x_k \end{matrix} \right\} \quad \text{falls} \quad (x_k)_{k=1}^{\infty} \quad \begin{cases} \text{isoton ist} \\ \text{antiton ist.} \end{cases}$$

❒

Beweis:
Siehe Schindler, Mathematik für Ökonomen, DUV, Satz 6.6 c). ■

Wir führen nun die Konvergenz einer beliebigen Zahlenfolge auf die Konvergenz monotoner Zahlenfolgen zurück. Konstruiert man aus der vorgegebenen Zahlenfolge $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ die Folgen $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ und $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ durch

$$\begin{aligned} a_k &:= \inf_{j\geqslant k} x_j = \inf\left\{x_k, x_{k+1}, \ldots\right\} \\ b_k &:= \sup_{j\geqslant k} x_j = \sup\left\{x_k, x_{k+1}, \ldots\right\}, \end{aligned}$$

so gelten offensichtlich folgende Eigenschaften:

[2]Hierbei lassen wir auch $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \pm\infty$ zu.

- $\forall k \in \mathbb{N} : a_k \leqslant x_k \leqslant b_k \qquad (\star)$
- $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ ist isoton und konvergiert daher nach Satz C.8 gegen $\sup\limits_{k \geqslant 1} a_k$, d.h.

  $$\lim_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to \infty} \inf_{j \geqslant k} x_j = \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{j \geqslant k} x_j \ .$$

  Der Grenzwert wird deswegen *Limes inferior* der Folge $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ genannt und mit $\liminf\limits_{k \to \infty} x_k$ bezeichnet.
- $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ ist antiton und konvergiert daher nach Satz C.8 gegen $\inf\limits_{k \geqslant 1} b_k$, d.h.

  $$\lim_{k \to \infty} b_k = \lim_{k \to \infty} \sup_{j \geqslant k} x_j = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{j \geqslant k} x_j$$

  Der Grenzwert wird deswegen *Limes superior* der Folge $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ genannt und mit $\limsup\limits_{k \to \infty} x_k$ bezeichnet.

Entscheidend ist nun der folgende Satz.

Satz C.9

Für jede Zahlenfolge $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ gilt[3]

a) $\liminf\limits_{k \to \infty} x_k$ ist der kleinste Häufungspunkt der Folge $(x_k)_{k=1}^{\infty}$.

b) $\limsup\limits_{k \to \infty} x_k$ ist der größte Häufungspunkt der Folge $(x_k)_{k=1}^{\infty}$.

c) $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ ist genau dann konvergent, wenn $\liminf\limits_{k \to \infty} x_k = \limsup\limits_{k \to \infty} x_k$ gilt. ❑

Beweis:

Ist $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ eine konvergente Teilfolge, so gilt nach Ungleichung $(\star)$

$$a_{n_j} \leqslant x_{n_j} \leqslant b_{n_j} .$$

Grenzwertbildung $\lim\limits_{j \to \infty}$ liefert daher

$$\liminf_{j \to \infty} x_j = \lim_{j \to \infty} a_{n_j} \leqslant \lim_{j \to \infty} x_{n_j} \leqslant \lim_{j \to \infty} b_{n_j} = \limsup_{j \to \infty} x_j .$$

$\limsup x_j$ ist Häufungspunkt von $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, da sich nach Definition von Supremum und Infimum in jeder Umgebung von $\limsup x_j$ Elemente der Folge $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ befinden. Entsprechend ist auch $\liminf x_j$ Häufungspunkt der Folge $(x_k)_{k=1}^{\infty}$.
Da eine Folge genau dann konvergiert, wenn sie nur einen Häufungspunkt besitzt, folgt der zweite Teil der Behauptung. ■

[3] Teile a), b) liefern insbesondere den Satz, dass jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

Satz C.10
Es gilt $\liminf\limits_{k\to\infty} x_k = -\limsup\limits_{k\to\infty}(-x_k)$. ❑

Beweis:
Es gilt offensichtlich

$$\inf\Big\{-x_k, -x_{k+1}, -x_{k+2}, \ldots\Big\} = -\sup\Big\{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots\Big\}.$$

Grenzwertbildung über k liefert daher

$$\liminf_{k\to\infty}(-x_k) = -\limsup_{k\to\infty} x_k.$$

■

C.3. Mengenfolgen

Beachtet man, dass "$\subset$" eine Ordnung auf $\wp(\Omega)$ darstellt, stehen alle ordnungstheoretischen Begriffe, wie z.B. Supremum, Infimum, Maximum, Minimum zur Verfügung und wir können die Konvergenz von Mengenfolgen wie für Zahlenfolgen definieren.

Satz C.11
Ist $\mathfrak{M} = \{M_i \mid i{\in}I\}$ eine Teilmenge von $\wp(\Omega)$ (Mengensystem), so gilt bzgl. der Ordnung "$\subset$":

$$\sup\mathfrak{M} \;=\; \bigcup_{i\in I} M_i \quad \text{und} \quad \inf\mathfrak{M} \;=\; \bigcap_{i\in I} M_i.$$

❑

Beweis:
Nach Definition der Vereinigung gilt

$$\forall i{\in}I : M_i \subset \bigcup_{j\in I} M_j \;,$$

d.h. $\bigcup\limits_{j\in I} M_j$ ist eine obere Schranke von $\mathfrak{M}$ bzgl. "$\subset$". Offensichtlich ist $\bigcup\limits_{j\in I} M_j$ auch die kleinste Menge mit dieser Eigenschaft. Analog argumentiert man beim Infimum. ■

Die letzten Ergebnisse und Satz C.8 legen nun folgende Definition nahe.

Definition C.12
Sei $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ eine monotone Mengenfolge[4]. In diesem Fall definiert man

$$\lim_{k\to\infty} X_k \;:=\; \left\{\begin{matrix} \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} X_k \\ \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} X_k \end{matrix}\right\} \text{ falls } (X_k)_{k=1}^{\infty} \left\{\begin{matrix} \text{isoton ist} \\ \text{antiton ist.} \end{matrix}\right.$$

❒

[4]Zur Erinnerung: $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ ist *isoton* bzw. *antiton*, wenn $X_k \subset X_{k+1}$ bzw. $X_k \supset X_{k+1}$ für alle $k{\in}\mathbb{N}$ gilt.

Wir führen nun wie im reellen Fall die Konvergenz einer beliebigen Mengenfolge auf die Konvergenz monotoner Folgen zurück. Konstruiert man aus der vorgegebenen Mengenfolge $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ die Folgen $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ und $(B_k)_{k=1}^{\infty}$ durch

$$\begin{aligned} A_k &:= \inf_{j\geqslant k} X_j &= \inf\{X_k, X_{k+1}, \dots\} &= \bigcap_{j=k}^{\infty} X_j \\ B_k &:= \sup_{j\geqslant k} X_j &= \sup\{X_k, X_{k+1}, \dots\} &= \bigcup_{j=k}^{\infty} X_j, \end{aligned}$$

so gelten offensichtlich folgende Eigenschaften:

a) $\forall k \in \mathbb{N} : A_k \subset X_k \subset B_k$

b) $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ ist isoton und konvergiert daher nach Definition C.12 gegen

$$\sup_{k\geqslant 1} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} X_j.$$

Der Grenzwert wird *Limes inferior* der Folge $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ genannt und mit $\liminf\limits_{k\to\infty} X_k$ bezeichnet, d.h.

$$\liminf_{k\to\infty} X_k := \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} X_j \ .$$

c) $(B_k)_{k=1}^{\infty}$ ist antiton und konvergiert daher nach Definition C.12 gegen

$$\inf_{k\geqslant 1} B_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} X_j.$$

Der Grenzwert wird *Limes superior* der Folge $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ genannt und mit $\limsup\limits_{k\to\infty} X_k$ bezeichnet, d.h.

$$\limsup_{k\to\infty} X_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} X_j \ .$$

Analog zum Fall reeller Zahlen definieren wir nun

Definition C.13

Die Mengenfolge $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ wird als konvergent bezeichnet, wenn gilt:

$$\liminf_{k\to\infty} X_k = \limsup_{k\to\infty} X_k \ .$$

Diese Menge heißt *Grenzwert* der Mengenfolge $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ und wird mit $\lim\limits_{k\to\infty} X_k$ notiert. ❐

Es gelten folgende elementare Aussagen.

Bemerkung C.14

i) Aufgrund der Eigenschaften der Komplementbildung gilt:

- $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ ist isoton $\iff$ $(\complement X_i)_{i=1}^{\infty}$ ist antiton
- $\complement\Big(\limsup\limits_{i\to\infty} X_i\Big) = \liminf\limits_{i\to\infty} \complement X_i$ und daher $\complement\Big(\lim\limits_{i\to\infty} X_i\Big) = \lim\limits_{i\to\infty} \complement X_i$

ii) Es gilt:

$$\begin{aligned}\liminf_{i\to\infty} X_i &= \{\omega\in\Omega \mid \exists i_0(\omega)\in\mathbb{N}\forall i \geqslant i_0 : \omega\in X_i\}\\ \limsup_{i\to\infty} X_i &= \{\omega\in\Omega \mid \omega\in X_i \text{ für unendlich viele } i\}\end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\omega\in \liminf_{i\to\infty} X_i = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty} X_j &\iff \exists k_0\in\mathbb{N} : \omega\in \bigcap_{j=k_0}^{\infty} X_j\\ &\iff \exists k_0\in\mathbb{N}\forall j\geqslant k_0 : \omega\in X_j\end{aligned}$$

Verwendet man Teil i) folgt die zweite Behauptung folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\omega \in \limsup_{i\to\infty} X_i \overset{\text{Teil i)}}{=} \complement \liminf_{i\to\infty} \complement X_i &\iff \omega \notin \liminf_{i\to\infty} \complement X_i\\ &\iff \neg\exists k_0\in\mathbb{N}\forall j\geqslant k_0 : \omega\in\complement X_j\\ &\iff \forall k_0\in\mathbb{N}\exists j\geqslant k_0 : \omega\in X_j\end{aligned}$$

Die letzte Äquivalenz ergibt sich dabei durch Anwendung formallogischer Rechenregeln für die Negation. ❐

Folgerung C.15

Sei $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Folge in $\wp(\Omega)$. Dann gelten folgende Aussagen:

a) $\liminf\limits_{i\to\infty} X_i \subset \limsup\limits_{i\to\infty} X_i$.

b) Ist $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ isoton, gilt $\lim\limits_{i\to\infty} X_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i$. Wegen der Isotonie der Folge $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ schreibt man daher $X_i \uparrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i$.

c) Ist $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ antiton, gilt $\lim\limits_{i\to\infty} X_i = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} X_i$. Man schreibt in diesem Fall $X_i \downarrow \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} X_i$. ❐

Beweis:

a) Ist $\omega \in \liminf\limits_{i\to\infty} X_i$, existiert ein $i_0\in\mathbb{N}$ mit $\omega \in \bigcap\limits_{\ell=i_0}^{\infty} X_\ell$, d.h. $\omega\in X_\ell$ für $\ell \geqslant i_0$. Damit liegt ω in $\bigcup\limits_{k=i}^{\infty} X_k$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und daher auch in der Menge $\limsup\limits_{i\to\infty} X_i = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=i}^{\infty} X_k$.

b) Ist $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ isoton, so gilt $\bigcap\limits_{k=i}^{\infty} X_k = X_i$, d.h. $\liminf\limits_{i\to\infty} X_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=i}^{\infty} X_k = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i =: G$. Wegen der Isotonie der Folge $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ gilt aber $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} X_k = \bigcup\limits_{k=i}^{\infty} X_k$ und daher

$$\limsup_{i\to\infty} X_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty} X_k = \bigcap_{i=1}^{\infty} G = G = \liminf_{i\to\infty} X_i$$

c) Ist $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ antiton, so folgt aus Bemerkung C.14 ii), dass $(\complement X_i)_{i=1}^{\infty}$ isoton ist und nach Teil b) dieses Satzes die Aussage $\lim\limits_{i\to\infty} \complement X_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \complement X_i$. Komplementbildung liefert die äquivalente Aussage $\lim\limits_{i\to\infty} X_i = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} X_i$. ■

C.4. Stetigkeit und Monotonie

Monotone Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind „fast überall“ stetig. Genauer gilt folgender für die Maßtheorie wichtiger Satz.

Satz C.16

Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.

a) An jeder Stelle x des Definitionsbereiches besitzt f einen linksseitigen Grenzwert $f(x^-) := \lim\limits_{t\uparrow x} f(t)$ und einen rechtsseitigen Grenzwert $f(x^+) := \lim\limits_{t\downarrow x} f(t)$.

b) Ist f monoton wachsend, gilt

$$\sup_{a<t<x} f(t) = f(x^-) \leqslant f(x) \leqslant f(x^+) = \inf_{x<t<b} f(t)$$

Außerdem gilt für $x < y$ die Aussage

$$f(x^+) \leqslant f(y^-)$$

c) Ist f monoton fallend, gilt

$$\inf_{a<t<x} f(t) = f(x^-) \leqslant f(x) \leqslant f(x^+) = \sup_{x<t<b} f(t)$$

Außerdem gilt für $x < y$ die Aussage

$$f(x^+) \geqslant f(y^-)$$

d) f besitzt höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. ❑

Beweis:

a), b) Sei $S := \sup\limits_{a<t<x} f(t)$. S ist endlich, da $S \leqslant f(x)$ wegen der Monotonie von f gilt. Wir zeigen, dass $f(x^-) = S$ gilt. Hierzu ist für eine beliebige von links[5] gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ die Eigenschaft $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = S$ nachzuweisen.

Sei hierzu $\epsilon > 0$ beliebig. Nach Definition eines Supremums existiert zunächst ein t mit $a < t < x$ mit

$$S - \epsilon < f(t) < S \ . \tag{C.1}$$

Da die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ von links gegen x konvergiert, existiert zu t ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n > N : t < x_n < x \ ,$$

woraus sich wegen der Monotonie von f für alle $n > N$ die Ungleichung

$$f(t) \leqslant f(x_n) \tag{C.2}$$

ergibt. Wegen $f(x_n) \leqslant S$ liefern Ungleichungen (C.1) und (C.2) die Behauptung

$$\forall n > N : S - \epsilon < f(x_n) \leqslant S$$

Entsprechend beweist man die zweite Aussage $f(x^+) = \inf\limits_{x<t<b} f(t)$.

Sind schließlich $x, y \in]a, b[$ mit $x < y$, so gilt zunächst wegen der Monotonie von f

$$f(x^+) = \inf_{x<t<b} f(t) = \inf_{x<t<y} f(t) \ . \tag{C.3}$$

Die letzte Gleichung ergibt sich dabei, indem man die vorher bewiesene Aussage auf das Intervall $]a, y[$ anwendet. Entsprechend gilt

$$f(y^-) = \sup_{a<t<y} f(t) = \sup_{x<t<y} f(t) \tag{C.4}$$

Gleichungen (C.3) und (C.4) liefern die noch fehlende Behauptung

$$f(x^+) = \inf_{x<t<y} f(t) \leqslant \sup_{x<t<y} f(t) = f(y^-)$$

c) Der Beweis erfolgt analog zum vorigen Teil. Alternativ kann auch auf Teil b) zurück gegriffen werden, indem man verwendet, dass $-f$ isoton ist, wenn f antiton ist und dass $\sup(-f) = -\inf f$ gilt.

[5] D.h. es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $a < x_n < x$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

d) O.B.d.A. sei f monoton wachsend. U bezeichne die Menge der Unstetigkeitsstellen von f, d.h. die Punkte x mit $f(x^-) \neq f(x^+)$. Ist $x \in U$, so gilt wegen der Isotonie von f daher $f(x^-) < f(x^+)$. Also existiert eine rationale Zahl $r(x) \in \mathbb{Q}$ mit:

$$f(x^-) < r(x) < f(x^+) \tag{C.5}$$

Wir zeigen, dass die Funktion $r : U \to \mathbb{Q}$ injektiv (sogar streng monoton wachsend) und daher U höchstens abzählbar ist. Zum Nachweis der Injektivität wähle man unterschiedliche x_1, x_2 in U, für die o.E. $x_1 < x_2$ gelte. Nach Teil b) gilt dann

$$f(x_1^+) \leqslant f(x_2^-)$$

und mit Ungleichung (C.5) folgt die Injektivitätsaussage

$$r(x_1) < f(x_1^+) \leqslant f(x_2^-) < r(x_2)$$

■

D. Topologie

In der Geometrie des $\mathbb{R}^k$ verwendet man einen Abstandsbegriff, der durch einen Betrag, eine Norm oder eine Metrik gegeben ist, um Konvergenz und daraus resultierende Eigenschaften wie Stetigkeit, Differenzierbarkeit oder Integrierbarkeit zu definieren.
Die *Topologie*[1] ist eine ungewöhnliche, exotisch erscheinende Art der Geometrie, in der man versucht, diese Eigenschaften ohne eine Abstandsfunktion zu definieren. Das Ungewohnte besteht darin, vertraute Begriffe von geometrischen Gebilden wie Form und Größe *nicht* zu beachten und stattdessen versteckte Eigenschaften, die bei der Deformation von geometrischen Objekten invariant bleiben, zu berücksichtigen.
Zentraler Begriff der Topologie ist der Begriff der offenen Menge, den wir zum besseren Verständnis zunächst im $\mathbb{R}^k$ definieren und untersuchen. Hierdurch wird die „topologische" Struktur des $\mathbb{R}^k$ so dargestellt, dass die Verallgemeinerung auf sog. *topologische Räume* offensichtlich wird. Zusätzlich wird klar, wie man Konvergenz, Stetigkeit usw. ohne Abstandsbegriff ausschließlich mit dem Begriff der offenen Menge definieren kann.

Definition D.1

a) Für $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^k$ definieren wir die *offene* bzw. *abgeschlossene $\varepsilon-$Umgebung von $\boldsymbol{g}$* durch

$$U_\varepsilon(\boldsymbol{g}) := \Big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k \mid |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{g}| < \varepsilon\Big\} \quad \text{bzw.} \quad B_\varepsilon(\boldsymbol{g}) := \Big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k \mid |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{g}| \leqslant \varepsilon\Big\}.$$

Jede Menge, die eine ε-Umgebung von $\boldsymbol{g}$ enthält, wird *Umgebung von $\boldsymbol{g}$* genannt.

b) Eine Folge $(\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathbb{R}^k$ *konvergiert* gegen den *Grenzwert $\boldsymbol{g}$*, wenn außerhalb jeder Umgebung von $\boldsymbol{g}$ höchstens endlich viele Folgenelemente liegen, d.h. wenn

$$\forall \varepsilon{>}0\ \exists N{\in}\mathbb{N}\ \forall n{>}N : \boldsymbol{x}_n \in U_\varepsilon(\boldsymbol{g})$$

c) Ein Punkt $\boldsymbol{x}_0$ heißt *innerer Punkt* einer Menge M, wenn eine Umgebung von $\boldsymbol{x}_0$ ganz in M liegt.

d) Eine Menge $O \subset \mathbb{R}^k$ heißt *offen*, wenn jeder Punkt in O ein innerer Punkt ist.

e) Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^k$ heißt *abgeschlossen*, wenn $\complement A$ offen ist. ❐

[1] topos = Ort, Stelle; logos = Kunde, Lehre

Satz D.2

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^k$ ist genau dann abgeschlossen, wenn A bzgl. der Grenzwertbildung abgeschlossen ist, d.h. ist $(\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in A, die konvergiert, so liegt auch der Grenzwert in A. ❑

Beweis:

$\Rightarrow$: Sei A abgeschlossen. Nimmt man an, dass eine Folge $(\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ in A existiert mit $\boldsymbol{x} = \lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n \notin A$, so ist dies äquivalent zu $\boldsymbol{x} \in \complement A$. Da $\complement A$ offen ist, existiert eine Umgebung U von $\boldsymbol{x}$ mit $U \subset \complement A$. Nach Definition der Konvergenz wiederum bedeutet dies, dass fast alle Elemente der Folge $(\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ in U und damit im Widerspruch zur Annahme in $\complement A$ liegen.

$\Leftarrow$: Sei A bzgl. Grenzwertbildung abgeschlossen. Wir zeigen, dass $\complement A$ offen ist. Sei hierzu $\boldsymbol{x}$ ein beliebiger Punkt in $\complement A$. Wäre $\boldsymbol{x}$ *kein* innerer Punkt von $\complement A$, so existierte zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Element $\boldsymbol{x}_n \in A \cap U_{\frac{1}{n}}(\boldsymbol{x})$. Wegen $\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\| \leqslant \frac{1}{n}$ ist damit $(\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in A, die - im Widerspruch zur Voraussetzung - gegen $\boldsymbol{x} \in \complement A$ konvergiert. ■

Folgende Eigenschaften ergeben sich direkt aus Definition D.1.

Eigenschaften D.3

(1) $\emptyset$ und $\mathbb{R}^k$ (bzw. die Grundmenge Ω) sind offene *und* abgeschlossene Mengen.

(2) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

(3) Endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen. Für unendliche Durchschnitte gilt diese Aussage i.a. nicht (z.B. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\, = \{0\}$).

(4) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

(5) Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen. Für unendliche Vereinigungen gilt diese Aussage i.a. nicht (z.B. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\, \frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}] = \,]0,1[$). ❑

Die vorher aufgelisteten Eigenschaften offener Mengen legen nun folgende Definition nahe.

Definition D.4

Ein Mengensystem $\mathfrak{T}$ in einer beliebigen Menge Ω mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) aus D.3 heißt *Topologie*. Das 2-Tupel $(\Omega, \mathfrak{T})$ heißt *topologischer Raum*.

a) Die Elemente von $\mathfrak{T}$ heißen *offene Mengen*. Eine Menge $A \subset \Omega$ heißt *abgeschlossen*, wenn $\complement A$ offen ist.

b) Eine Menge U heißt Umgebung von $\boldsymbol{g} \in \Omega$, wenn eine offene Menge O existiert mit $\boldsymbol{g} \in O \subset U$. $\mathfrak{U}(\boldsymbol{g})$ bezeichne das System aller Umgebungen von $\boldsymbol{g}$.

c) Eine Folge $(\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ in Ω *konvergiert* gegen den *Grenzwert* $\boldsymbol{g}$, wenn außerhalb jeder Umgebung von $\boldsymbol{g}$ höchstens endlich viele Folgenelemente liegen, d.h. wenn

$$\forall U{\in}\mathfrak{U}(\boldsymbol{g})\ \exists N{\in}\mathbb{N}\ \forall n{>}N : \boldsymbol{x}_n \in U(\boldsymbol{g}). \qquad ❒$$

Beispiel D.5

Extrembeispiele für Topologien auf einer Menge $\Omega{\neq}\emptyset$ sind die *diskrete Topologie* $\mathfrak{T}{:=}\wp(\Omega)$ und die *indiskrete Topologie* $\mathfrak{T}{:=}\{\emptyset, \Omega\}$. ❒

Definition D.6

Sei M Teilmenge eines topologischen Raumes $(\Omega, \mathfrak{T})$.

a) Der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die M enthalten, d.h. die Menge

$$\bigcap_{\substack{M\subset A \\ A \text{ abg}}} A$$

ist nach Eigenschaft D.3(4) abgeschlossen. Sie ist die kleinste abgeschlossene Menge, die M enthält, wird mit $\overline{M}$ notiert und heißt *topologischer Abschluss der Menge M.*

b) Die Vereinigung aller offenen Mengen, die in M liegen, d.h. die Menge

$$\bigcup_{\substack{O\subset M \\ O \text{ offen}}} O$$

ist nach Eigenschaft D.3(2) offen. Sie ist die größte offene Menge, die in M liegt, wird mit $\overset{\circ}{M}$ oder M° notiert und heißt der *offene Kern der Menge M.*

c) Die Menge $\overline{M}\setminus\overset{\circ}{M}$ heißt der *Rand von M* und man schreibt ∂M. ❒

Definition D.7

Eine Menge $B{\subset}\mathbb{R}^k$ heißt *beschränkt*, wenn eine Konstante $C{>}0$ existiert, mit $B \subset U_C(\mathbf{0})$, d.h. wenn $\|\boldsymbol{b}\| < C$ für alle $\boldsymbol{b} \in B$ gilt. ❒

Mit Hilfe des folgenden Satzes kann der Begriff der kompakten, d.h. abgeschlossenen und beschränkten Mengen in $\mathbb{R}^n$ allein mit Hilfe von offenen Mengen definiert werden. Dadurch ist es möglich diesen Kompaktheitsbegriff auch auf beliebige topologische Räume, in denen i.a. kein Abstandsbegriff (Metrik, Norm) zur Verfügung steht, zu übertragen.

Satz D.8 (Heine-Borel)

Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^k$ ist genau dann abgeschlossen und beschränkt, wenn jede *offene Überdeckung*[2] von K eine endliche Teilüberdeckung[3] besitzt. ❑

[2]Dies ist ein System offener Mengen $\{O_\alpha \mid \alpha{\in}I\}$ mit $K \subset \bigcup_{\alpha\in I} O_\alpha$.

[3]D.h. es existieren $O_{\alpha_1}, \ldots, O_{\alpha_n}$ mit $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} O_{\alpha_j}$.

Beweis:

$\Leftarrow$: K besitze die endliche Überdeckungseigenschaft. Wegen $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n(\mathbf{0}) = \mathbb{R}^k$ ist die Folge $(U_n(\mathbf{0}))_{n=1}^{\infty}$ eine offene Überdeckung von K, die daher eine endliche Teilüberdeckung $U_{n_1}(\mathbf{0}), \ldots, U_{n_\ell}(\mathbf{0})$ besitzt. Wegen $U_j(\mathbf{0}) \subset U_{j+1}(\mathbf{0})$ folgt die Beschränktheit von K aus

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} U_{n_j}(\mathbf{0}) = U_{n_\ell}(\mathbf{0}). \tag{D.1}$$

Die Abgeschlossenheit von K beweisen wir indirekt. Wäre K *nicht* abgeschlossen, existiert eine Folge $(\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ in K, mit $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n =: \boldsymbol{x} \notin K$. Wegen $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{x}\}$ folgt

$$K \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(\boldsymbol{x}) = \emptyset \iff K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \complement B_{\frac{1}{n}}(\boldsymbol{x}).$$

Also ist $\left(\complement B_{\frac{1}{n}}(\boldsymbol{x})\right)_{n=1}^{\infty}$ eine offene Überdeckung von K. Wie in (D.1) bestimmt man nun eine natürliche Zahl $\ell \in \mathbb{N}$ mit $K \subset \complement B_{\frac{1}{\ell}}(\boldsymbol{x})$ und daher

$$K \cap B_{\frac{1}{\ell}}(\boldsymbol{x}) = \emptyset.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $\boldsymbol{x} = \lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n$ und $\boldsymbol{x}_n \in K$.

$\Rightarrow$: Wir zeigen zunächst indirekt, dass jedes k-dimensionale Intervall $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^k)$ die endliche Überdeckungseigenschaft besitzt.
Sei hierzu $\mathfrak{O} = \{O_\alpha \mid \alpha \in I\}$ eine offene Überdeckung von $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, so dass *keine* endliche Teilüberdeckung existiert. Wir konstruieren nun eine Folge abgeschlossener Intervalle $[\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_n]$ mit folgenden Eigenschaften

(1) $[\boldsymbol{a}_{n+1}, \boldsymbol{b}_{n+1}] \subset [\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_n]$. Insbesondere ist $(\boldsymbol{a}_n)_{n=1}^{\infty}$ eine monoton wachsende, $(\boldsymbol{b}_n)_{n=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge.

(2) $\|\boldsymbol{b}_n - \boldsymbol{a}_n\| \leqslant \frac{1}{2^n} \cdot \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|$.

(3) *Kein* Intervall $[\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_n]$ wird von endlich vielen Mengen aus $\mathfrak{O}$ überdeckt.

Wir zerlegen hierzu durch Halbierung jeder „Kante“ das k-dimensionale Intervall $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ in 2^k Teilintervalle, deren Vereinigung $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ ergibt. Da $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ *nicht* von endlich vielen Mengen aus $\mathfrak{O}$ überdeckt wird, gilt dies auch für mindestens eines dieser Teilintervalle. Wir bezeichnen dieses mit $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1]$. Nach Konstruktion gilt offensichtlich $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1] \subset [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ und $\|\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{a}_1\| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|$.
Wiederholt man diesen Prozess mit $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1]$ und setzt dies so fort, entsteht induktiv die gewünschte Folge von Intervallen.
Da nach Eigenschaft **(1)** die Folge $(\boldsymbol{a}_n)_{n=1}^{\infty}$ isoton und nach oben beschränkt ist (z.B. durch $\boldsymbol{b}$) und die Folge $(\boldsymbol{b}_n)_{n=1}^{\infty}$ antiton und nach unten beschränkt ist (z.B. durch $\boldsymbol{a}$), existieren $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{b}_n$ und nach Eigenschaft **(2)** folgt

$$\|\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{b}_n - \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n\| = \lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{b}_n - \boldsymbol{a}_n\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\| = 0 \ .$$

Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{b}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n =: \boldsymbol{g}$ bzw. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_n] = \{\boldsymbol{g}\}$.
$\boldsymbol{g}$ liegt daher in mindestens einer der offenen Mengen aus der Überdeckung $\mathfrak{O}$, etwa O_β. Nach Definition der Konvergenz existiert dann eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n > N : \boldsymbol{b}_n \in O_\beta \wedge \boldsymbol{a}_n \in O_\beta \ .$$

Im Widerspruch zu Eigenschaft **(3)** folgt daraus jedoch

$$\forall n > N : [\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_n] \subset O_\beta \ ,$$

Ist nun K eine beliebige abgeschlossene und beschränkte Menge und $\mathfrak{O}$ eine offene Überdeckung von K, kann wegen der Beschränktheit von K ein Intervall $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ gewählt werden mit $K \subset [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Da $\complement K$ offen ist, bildet $\mathfrak{O} \cup \{\complement K\}$ eine offene Überdeckung von $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, die – wie vorher gesehen – eine endliche Teilüberdeckung besitzt, etwa $O_{\alpha_1}, \ldots, O_{\alpha_n}, \complement K$. Es gilt also

$$K \subset [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subset O_{\alpha_1} \cup \cdots \cup O_{\alpha_n} \cup \complement K \ .$$

Daher besitzt K eine endliche Teilüberdeckung, denn wegen $K \cap \complement K = \emptyset$ folgt

$$K \subset O_{\alpha_1} \cup \cdots \cup O_{\alpha_n} \ .$$

■

Wie schon vorher erwähnt führt Satz D.8 zu folgender Definition.

Definition D.9
Eine Teilmenge K eines topologischen Raumes $(\Omega, \mathfrak{T})$ heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt. ❐

Wie Beispiel D.5 zeigt, ist der Begriff der Topologie so allgemein gehalten, dass unter Umständen pathologische Effekte auftreten. Z.B. kann i.a. nicht mehr garantiert werden, dass kompakte Mengen abgeschlossen sind, wie das Beispiel einpunktiger Mengen in der indiskreten Topologie $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \Omega\}$ zeigt. Der Grund für dieses ungewohnte Verhalten ist, dass in dieser Topologie verschiedene Punkte nicht durch disjunkte Umgebungen „getrennt“ werden können. Um solche ungewöhnlichen Eigenschaften auszuschließen, wird von topologischen Räumen üblicherweise gefordert, dass sie im Sinne der folgenden Definition *separiert* sind.

Definition D.10
Ein topologischer Raum $(\Omega, \mathfrak{T})$ heißt *separiert* oder *Hausdorff-Raum*, wenn zu allen Punkten $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ in Ω mit $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$ Umgebungen $U \in \mathfrak{U}(\boldsymbol{a})$ und $V \in \mathfrak{U}(\boldsymbol{b})$ mit $U \cap V = \emptyset$ existieren. ❐

Satz D.11
Sei $(\Omega, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum. Dann gilt:

a) Ω ist genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn der Durchschnitt aller abgeschlossenen Umgebungen eines jeden Punktes $\boldsymbol{x}$ gleich $\{\boldsymbol{x}\}$ ist. Insbesondere ist in einem Hausdorff-Raum jede endliche Menge abgeschlossen.

b) Ist Ω ein Hausdorff-Raum und K eine kompakte Teilmenge, so existieren zu jedem $\boldsymbol{x} \in \complement K$ offene Mengen U und V mit

$$K \subset U, \; x \in V \text{ und } U \cap V = \emptyset.$$

Insbesondere sind kompakte (also auch endliche) Teilmengen von Hausdorff-Räumen abgeschlossen. ❑

Beweis:

a) Sei Ω ein Hausdorff-Raum und sei $\boldsymbol{x}$ ein beliebiger Punkt in Ω. Ist nun $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$, so existieren nach Definition D.10 offene Umgebungen U und V von $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ mit $U \cap V = \emptyset$. Dies ist äquivalent zu $U \subset \complement V$, woraus wegen der Abgeschlossenheit von $\complement V$ auch $\overline{U} \subset \complement V$, d.h. $\boldsymbol{y} \notin \overline{U}$, folgt. Damit ist $\boldsymbol{x}$ das einzige Element, das in allen abgeschlossenen Umgebungen von $\boldsymbol{x}$ liegt.

Sei umgekehrt Ω ein topologischer Raum mit

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Omega : \bigcap_{\substack{A \in \mathfrak{U}(\boldsymbol{x}) \\ A \text{ abg}}} A = \{\boldsymbol{x}\}.$$

Für $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ gilt $\{\boldsymbol{x}\} \cap \{\boldsymbol{y}\} = \emptyset$ und damit

$$\boldsymbol{y} \in \complement\{\boldsymbol{x}\} = \complement \bigcap_{\substack{A \in \mathfrak{U}(\boldsymbol{x}) \\ A \text{ abg}}} A = \bigcup_{\substack{A \in \mathfrak{U}(\boldsymbol{x}) \\ A \text{ abg}}} \complement A$$

Also existiert eine abgeschlossene Umgebung A von $\boldsymbol{x}$ mit $\boldsymbol{y} \in \complement A$. Setzt man $U := A$ und $V := \complement A$, sind zwei Umgebungen gefunden, die $U \cap V = \emptyset$ erfüllen.

b) Sei K kompakt und $\boldsymbol{x} \notin K$. Aufgrund der Separiertheit von Ω existieren zu jedem Punkt $\boldsymbol{k} \in K$ offene Umgebungen $U_{\boldsymbol{k}}$ von $\boldsymbol{k}$ und $V_{\boldsymbol{k}}$ von $\boldsymbol{x}$ mit $U_{\boldsymbol{k}} \cap V_{\boldsymbol{k}} = \emptyset$. Da $(U_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k} \in K}$ trivialerweise eine offene Überdeckung von K ist, existieren $\boldsymbol{k}_1, \ldots, \boldsymbol{k}_n$, so dass $U_{\boldsymbol{k}_1}, \ldots, U_{\boldsymbol{k}_n}$ eine endliche Teilüberdeckung von K ist, d.h. es gilt

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{\boldsymbol{k}_j}.$$

Definiert man $U := \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{\boldsymbol{k}_j}$ und $V := \bigcap\limits_{j=1}^{n} V_{\boldsymbol{k}_j}$, so sind U und V offene Mengen mit den gewünschten Eigenschaften, denn es gilt

$$U \cap V = \Big(\bigcup_{j=1}^{n} U_{\boldsymbol{k}_j}\Big) \cap \Big(\bigcap_{\ell=1}^{n} V_{\boldsymbol{k}_\ell}\Big) = \bigcup_{j=1}^{n} \Big(U_{\boldsymbol{k}_j} \cap \Big(\bigcap_{\ell=1}^{n} V_{\boldsymbol{k}_\ell}\Big)\Big) \subset \bigcup_{j=1}^{n} \Big(U_{\boldsymbol{k}_j} \cap V_{\boldsymbol{k}_j}\Big) = \emptyset \; .$$

Zu zeigen bleibt, dass K abgeschlossen, d.h. $\complement K$ offen ist. Zu $\boldsymbol{x} \in \complement K$ existiert, wie vorher gesehen, eine offene Menge $V_{\boldsymbol{x}}$ mit $V_{\boldsymbol{x}} \cap K = \emptyset$, d.h. $V_{\boldsymbol{x}} \subset \complement K$. Damit folgt

$$\bigcup_{\boldsymbol{x} \in \complement K} V_{\boldsymbol{x}} = \complement K,$$

d.h. $\complement K$ ist als Vereinigung offener Mengen offen. ■

Satz D.12

Ist $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ eine antitone Folge nichtleerer kompakter Mengen in einem separierten topologischen Raum, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} K_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset \; .$$

❑

Beweis:

Wir beweisen die Aussage indirekt, indem wir $K_1 \cap \Big(\bigcap\limits_{n=2}^{\infty} K_n\Big) = \emptyset$ annehmen. Dies ist äquivalent zu $K_1 \subset \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} \complement K_n$, d.h. $(\complement K_n)_{n=2}^{\infty}$ ist eine offene Überdeckung von K_1. Diese besitzt wegen der Kompaktheit von K_1 eine endliche Teilüberdeckung $\complement K_{n_1}, \ldots, \complement K_{n_\ell}$, d.h. es gilt

$$K_1 \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} \complement K_{n_j} \iff K_1 \cap \Big(\bigcap_{j=1}^{\ell} K_{n_j}\Big) = \emptyset \; .$$

Dies ist ein Widerspruch, da aufgrund der Antitonie $K_1 \cap \Big(\bigcap\limits_{j=1}^{\ell} K_{n_j}\Big) = K_{n_\ell}$ und nach Voraussetzung $K_{n_\ell} \neq \emptyset$ gilt. ■

Bemerkung D.13

i) Bekanntestes Beispiel für eine antitone Folge kompakter Mengen sind Intervallschachtelungen in den reellen Zahlen, d.h. Intervalle $[a_n, b_n]$ mit

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$$

Der Durchschnitt dieser Intervalle ist gemäß Satz D.12 nicht leer und besteht wegen $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ aus genau einem Element.

ii) Betrachtet man die antitone Folge $K_n := [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \setminus \{0\}$ zeigt sich, dass in Satz D.12 nicht auf die Kompaktheit verzichtet werden kann. ❐

Satz D.14

Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, wobei $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^k$ ($k, m \in \mathbb{N}$ fest). $\boldsymbol{x}_0$ sei ein Punkt des Definitionsbereiches $\mathbb{D}$, $\boldsymbol{y}_0 := f(\boldsymbol{x}_0)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = f\Big(\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{x}\Big) = f(\boldsymbol{x}_0)$.

2.) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta \implies \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)\| < \varepsilon$.

3.) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : f\Big(U_\delta(\boldsymbol{x}_0)\Big) \subset U_\varepsilon(\boldsymbol{y}_0)$.

4.) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : U_\delta(\boldsymbol{x}_0) \subset f^{-1}\Big(U_\varepsilon(\boldsymbol{y}_0)\Big)$.

Ist eine der vier äquivalenten Aussagen erfüllt, so heißt f *stetig im Punkt* $\boldsymbol{x}_0$. f heißt *stetig* auf $\mathbb{D}$, wenn f in jedem Punkt des Definitionsbereiches $\mathbb{D}$ stetig ist. ❑

Satz D.15

Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung mit $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^k$. Dann sind äquivalent:

a) f ist stetig

b) Die Urbilder offener Mengen sind offene Mengen (in $\mathbb{D}$).

c) Die Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossene Mengen (in $\mathbb{D}$). ❑

Beweis:

Wegen $f^{-1}(\complement O) = \complement f^{-1}(O)$ ist die Äquivalenz von b) und c) offensichtlich. Es bleibt daher nur die Äquivalenz von b) und a) zu zeigen.

Sei zunächst f stetig und O eine offene Menge. Wir beweisen die Offenheit von $f^{-1}(O)$, indem wir zeigen, dass jeder Punkt in $f^{-1}(O)$ ein innerer Punkt ist. Sei hierzu $\boldsymbol{x}_0 \in f^{-1}(O)$ beliebig, d.h. gelte $\boldsymbol{y}_0 := f(\boldsymbol{x}_0) \in O$. Da O offen ist, existiert ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(\boldsymbol{y}_0) \subset O$. Wegen der Stetigkeit von f existiert daher nach Satz D.14 ein $\delta > 0$ mit

$$U_\delta(\boldsymbol{x}_0) \subset f^{-1}\Big(U_\epsilon(\boldsymbol{y}_0)\Big) \subset f^{-1}(O),$$

d.h. $\boldsymbol{x}_0$ ist ein innerer Punkt von $f^{-1}(O)$.

Seien umgekehrt die Urbilder offener Mengen offen. Sind $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{D}$ und $\epsilon > 0$ beliebig, so ist $U_\epsilon(f(\boldsymbol{x}_0))$ offen. Nach Voraussetzung ist daher auch $f^{-1}\Big(U_\epsilon\Big(f(\boldsymbol{x}_0)\Big)\Big)$ offen und enthält offensichtlich $\boldsymbol{x}_0$. Also existiert ein $\delta > 0$ mit

$$U_\delta(\boldsymbol{x}_0) \subset f^{-1}\Big(U_\epsilon\Big(f(\boldsymbol{x}_0)\Big)\Big),$$

d.h. f ist nach Satz D.14 stetig in $\boldsymbol{x}_0$. ■

Satz D.15 führt zu folgender allgemeinen Definition der Stetigkeit.

Definition D.16

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen den topologischen Räumen $(X, \mathfrak{T}_X)$ und $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ heißt *stetig*, wenn die Urbilder offener Mengen offen sind, d.h. wenn gilt

$$f^{-1}(\mathfrak{T}_Y) \subset \mathfrak{T}_X \ .$$

❐

Index

Symbole

A

B

C

D

E

F

G

H

I

K

L

M

T

U

V

W

Z