

ARBEITSUNTERLAGEN

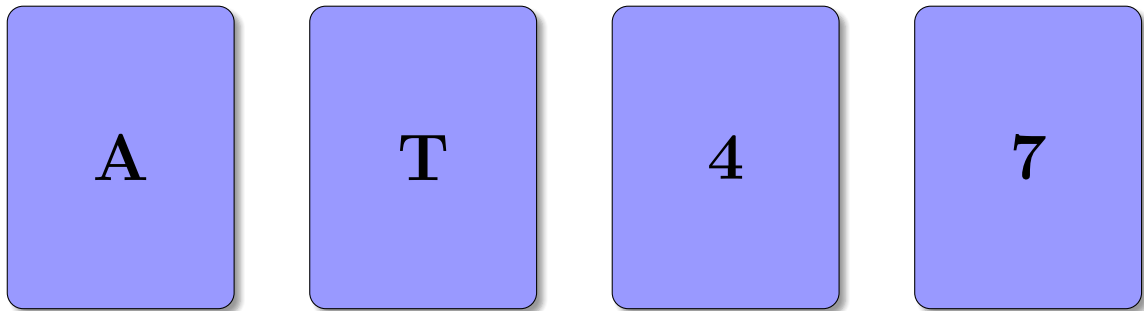
ZUR
VORLESUNG UND ÜBUNG
AN DER
UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

MATHEMATIK **Wirtschaft&Recht**

IM
SS 2018

1 Aufgabe (Aussagenlogik, Quantoren)

- a) Vor Ihnen liegen vier Karten. Jede Karte hat auf einer Seite einen Buchstaben und auf der anderen Seite eine Zahl (siehe nachfolgende Graphik).



Unsere Hypothese lautet: »Wenn sich ein Vokal auf der einen Seite befindet, dann steht auf der anderen Seite eine gerade Zahl.« Sie sollen diese Hypothese überprüfen und dürfen dazu zwei Karten umdrehen. Welche sehen Sie sich an?

- b) Kyra, Aline und Nadine haben zwar die gleiche T-Shirt-Größe, jedoch hat jede eine andere Haarfarbe, schwarz, rot bzw. blond¹. Nur eine der folgenden vier Aussagen ist wahr. Wer ist was? (Begründung!)

- 1.) Nadine ist nicht rot 2.) Kyra ist nicht blond
3.) Kyra ist nicht rot 4.) Nadine ist blond

- c) Übersetzen Sie folgende formalen Aussagen in die „Umgangssprache“ und bestimmen Sie deren Wahrheitsgehalt.

- i) $\forall x \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n$ ist ein Teiler von x
ii) $\exists x \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n$ ist ein Teiler von x
iii) $\forall n \in \mathbb{N} \exists x \in \mathbb{N} : n$ ist ein Teiler von x
iv) $\exists x \in \mathbb{Z} \forall n \in \mathbb{N} : n$ ist ein Teiler von x

- d) Drücken Sie den folgenden Sachverhalt formal aus:

Jede positive reelle Zahl ist Quadrat von mindestens einer reellen Zahl.

- e) Man bestimme die Lösungsmenge der folgenden Aussageformen über dem angegebenen Definitionsbereich $\mathbb{D}$.

- i) $a(x) := „x$ ist ein Teiler von 15“; $\mathbb{D} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
ii) $a(x, y) := „x$ ist ein Teiler von y “; $\mathbb{D} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 6), (6, 3)\}$
iii) $a(u, v) := „u^2 + v^2 = 2$ “; $\mathbb{D} = \{(u, v) \mid u, v \in \mathbb{Z}\}$

2 Aufgabe (Logik)

- a) Geben Sie eine Wahrheitstabelle für die Aussagenverbindung $(p \rightarrow q) \wedge \bar{q} \rightarrow \bar{p}$ an.

¹Ähnlichkeiten mit lebenden Personen sind weder beabsichtigt noch zufällig, sondern unvermeidlich.

- b) Bei welchen der folgenden Ausdrücke handelt es sich um Implikationen bzw. Äquivalenzen?

$$A : (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$$

$$B : (p \vee q) \rightarrow \bar{p}$$

$$C : (\bar{q} \vee p) \leftrightarrow (\bar{p} \leftrightarrow \bar{q})$$

- c) Seien p, q, r, s, t Aussagen. Untersuchen Sie, ob die folgenden beiden Aussagenverbindungen A_1 und A_2 logisch äquivalent sind.

$$A_1 := \bar{p} \vee (s \wedge t) \vee (\bar{s} \wedge \bar{t}) \vee q \rightarrow r, \quad A_2 := ([p \rightarrow (s \leftrightarrow t)] \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

3 Aufgabe (Aussagenlogik)

Ein Zeuge, der nach einem Banküberfall einige Verdächtige beobachtet hat, ist so nervös, dass er folgende nur bruchstückhafte Angaben macht:

- 1) „Der Älteste, der mit den schwarzen Haaren, ist kleiner als einsneunzig.“
- 2) „Der Größte von denen hat kein braunes Haar.“
- 3) „Der Kleinste, der Blonde, war über zwanzig. Aber er war nicht der mit dem T-Shirt.“
- 4) „Der mit dem Sweatshirt war zwanzig, der hatte noch keine Glatze.“
- 5) „Der mit dem Anorak war einsachtzig groß.“
- 6) „Einer war einsneunzig und siebenundzwanzig. Aber das ist nicht der Rothaarige mit der Lederjacke.“

Ordnen Sie den fünf verdächtigen Personen jeweils eines der folgenden Merkmale zu:

- Größe: 1,75; 1,80; 1,85; 1,90; 1,95
- Haarfarbe: schwarz, braun, blond, rot, Glatze
- Kleidung: T-Shirt, Sweatshirt, Anorak, Lederjacke, Jeansjacke
- Alter: 17, 20, 27, 32, 45.

4 Aufgabe (Logik, Beweise)

- a) Es seien p, q, r ungerade ganze Zahlen. Beweisen Sie, dass die Gleichung $px^2 + qx + r = 0$ keine rationale Lösung besitzt.

Hinweis: Gehen Sie von einer teilerfremden Lösung der Form $x = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ aus und unterscheiden Sie alle möglichen Kombinationen der Fälle „ m bzw. n gerade/ungerade“!

- b) Beweisen Sie die Gleichung

$$\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}|a - b|.$$

- c) Äußern Sie sich zu folgender Rechnung!

$$\ln(x^2)=0 \iff 2\ln(x)=0 \iff \ln(x)=0 \iff x=1$$

- d) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: »Jeder ganzzahlige Betrag $k \geq 4$ ist mit $2 \in$ und $5 \in$ darstellbar!«
- e) Wir behaupten

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2n-1 \leq 2^{n-1},$$

und beweisen diese Aussage durch vollständige Induktion:

- Induktionsanfang: Für $n=1$ ist $2n-1 = 1 = 2^0$.
- Induktionsannahme: Die Behauptung sei bewiesen für ein $m \in \mathbb{N}$.
- Induktionsschritt:

$$2(m+1) - 1 = (2m-1) + 2 \leq 2^{m-1} + 2 \leq 2^{m-1} + 2^{m-1} = 2^m.$$

- Also gilt die Behauptung für alle natürlichen Zahlen.

- i) Überprüfen Sie die Gültigkeit der Aussage für $n = 1, 2, 3, 4$.
- ii) Finden Sie den Fehler in obigem Induktionsbeweis.
- f) Wir behaupten: »Für alle natürlichen Zahlen n ist $n^2 - 79n + 1601$ eine Primzahl!« Beweisen oder widerlegen Sie diese Aussage!
- g) Berechnen Sie für einige natürliche Zahlen n die Summe $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k$. Finden Sie dann eine Summenformel und beweisen diese.
- h) Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Rentenendwertfaktoren!
- i) Für alle $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ mit $k \geq \ell$ gilt: $s_k(x) - s_\ell(x) = x^\ell \cdot s_{k-\ell}(x)$.
- ii) Für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$ und $x \geq 1$ gilt: $s_\ell(x) \geq \ell$.
- iii) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ und $x \geq 1$ gilt: $n \cdot s_m(x) \geq m \cdot s_n(x)$.

5 Aufgabe (Vollständige Induktion, Binomischer und Polynomischer Lehrsatz)

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ ist der **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k}$ definiert durch²

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{für } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{für } n < k \text{ oder } k < 0 \end{cases}$$

- a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$.

- i) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
- ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- iii) $\sum_{j=0}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

Interpretieren Sie die Aussagen ai) – aiii) im **Pascalschen Dreieck**.

²Man beachte hierbei, dass $0! = 1$ definiert ist.

b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion den **Binomischen Lehrsatz**.

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

c) Seien ℓ , m und n natürliche Zahlen. Überprüfen Sie die Gleichung

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n}{k} \cdot \binom{m}{\ell-k} = \binom{n+m}{\ell}$$

für $\ell=2$, $n=3$, $m=4$. Beweisen Sie anschließend Gleichung (1)!

6 Aufgabe (Mengenlehre)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 50 \wedge n \text{ ist Teiler von } x\}$. Berechnen Sie folgende Mengen

a) A_7, A_{25}

b) $A_2 \cap A_3, A_{11} \cap \mathbb{N}, (A_5 \cup A_7) \setminus (A_5 \cap A_7), (A_2 \setminus A_3) \cap A_{10}$

c) $\bigcup_{k=2}^{10} A_k, \bigcap_{k=2}^{10} A_k$

d) $\wp(A_{17} \setminus A_2), (A_2 \times A_5) \cap (A_{11} \times A_2)$.

7 Aufgabe (Mengenlehre)

Bestimmen Sie (sofern existent) Supremum, Infimum, Maximum und Minimum folgender Teilmengen von $\mathbb{R}$.

a) $M_1 = \left\{ \frac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

b) $M_2 = \mathbb{Q} \cap [\sqrt{5}, \sqrt{6}]$

c) $M_3 = \left\{ x + \frac{1}{x} \mid x \in \left] \frac{1}{2}, 2 \right] \right\}$

d) $M_4 = \left\{ \frac{|x|}{1+|x|} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$.

8 Aufgabe (Mengenlehre)

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke, wobei die resultierenden Formeln aus nicht mehr Symbolen bestehen sollten, als die jeweils in Klammern hinter dem Ausdruck stehende Zahl angibt:

a) $A \cap ((A \cup B) \setminus B) \quad (3),$

b) $(A \setminus B) \cap ((A \cap B) \cup (A \setminus C)) \quad (6),$

c) $(A \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap C) \quad (1),$

d) $(A \cup (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C)) \cap (A \cup B \cup C) \quad (1),$

e) $\overline{((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{B}))} \cap \overline{((\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cup \overline{B}))} \quad (3).$

9 Aufgabe (Mengenlehre)

- a) Für eine Volkswirtschaft werden in einer Erhebung die folgenden Daten ermittelt (Angaben in % bezogen auf die Gesamtbevölkerung):

Anteil Frauen :	60		
Verheiratete:	50		
männliche Brillenträger:	25	davon ledig:	8
Frauen mit Brille:	25	davon verheiratet:	7

Mit diesen Informationen berechne man den Anteil der

- i) ledigen Frauen ohne Brille
 - ii) verheirateten bzw. nicht verheirateten Brillenträger
 - iii) Brillenträger.
- b) Eine vom Max-Planck-Institut für Geflügel-Wissenschaften in Auftrag gegebene Studie über die Akzeptanz der $1\frac{1}{2}$ -Eier-Hühner liefert folgende Ergebnisse:

„Von den deutschen Betriebswirten lieben 70% Enten, 65% mögen Puten und 40% sowohl Enten als auch Puten. 15% mögen sowohl Puten als auch $1\frac{1}{2}$ -Eier-Hühner und ebensoviele haben sich gleichzeitig für Enten und $1\frac{1}{2}$ -Eier-Hühner entschieden. 10% lieben alle 3 Geflügelsorten.“

Wie hoch ist unter den deutschen Betriebswirten der Prozentsatz der Liebhaber von $1\frac{1}{2}$ -Eier-Hühnern?

10 Aufgabe (Relationen, Ordnung)

- a) Lukas hat in der „irrationalen“ Menge $X := \{e, \pi, \sqrt{2}\}$ eine binäre Relation $\mathcal{R}$ definiert, die seine mathematisch-pathologischen Präferenzen für die entsprechenden Zahlen ausdrückt. Es gilt:

$$\mathcal{R} := \{(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, e), (\pi, \sqrt{2}), (e, e), (\pi, e), (\pi, \pi)\} \subset X \times X$$

- i) Überprüfen Sie, ob $\mathcal{R}$ in X eine
 - 1) Ordnung 2) Präferenzordnung 3) Totalordnung ist.

Wir bezeichnen die Relation $\mathcal{R}$ im Folgenden mit $\succsim$.

- ii) Handelt es sich bei den Abbildungsvorschriften $x \mapsto \frac{1}{x}$ und $x \mapsto e^{(x^2)}$ um Nutzenfunktionen, die Lukas Präferenzen darstellen? Geben Sie zwei repräsentierende Nutzenfunktionen an.

Hinweis: Eine Abbildung $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *repräsentierende Nutzenfunktion* einer Präferenzordnung $\succsim$ in X , wenn gilt:

$$\forall x, y \in X : x \succsim y \stackrel{\text{Def.}}{\iff} u(x) \geq u(y)$$

- b) Wir betrachten einen Konsumenten, der Güterbündel $\mathbf{x} = (b, c)$ konsumiert ($b, c > 0$). b und c geben dabei die Menge an Bier bzw. Chips an, aus denen sich das Güterbündel zusammensetzt.

Der Konsument präferiert Güterbündel $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ dem Güterbündel $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ und wir schreiben $\mathbf{u} \succcurlyeq \mathbf{v}$ genau dann, wenn gilt:

$$u_1 \cdot u_2 \geq v_1 \cdot v_2$$

Die Relationen $\sim$ (*Indifferenz*) und $\succ$ (*starke Präferenz*) sind definiert durch:

$$\begin{aligned} x \sim y &\stackrel{\text{Def.}}{\iff} (x \succcurlyeq y) \wedge (y \succcurlyeq x) \\ x \succ y &\stackrel{\text{Def.}}{\iff} (x \succcurlyeq y) \wedge (x \not\sim y) \end{aligned}$$

- i) Für welche Güterbündel $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ gilt $\mathbf{u} \succ \mathbf{v}$ bzw. $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$?
- ii) Zeichnen Sie alle Güterbündel, die der Konsument dem Güterbündel $(2, 1)$ präferiert bzw. strikt präferiert in das gleiche Diagramm ein. Skizzieren Sie außerdem die „Indifferenzmenge“ zum Güterbündel $(2, 1)$.
- iii) Sei der Konsument zwischen den Gterbndeln $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ indifferent, d.h. gelte $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$ und sei $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. Zeigen Sie, dass für alle $t \in]0, 1[$

$$t \cdot \mathbf{u} + (1-t) \cdot \mathbf{v} \succ \mathbf{u}$$

gilt und verdeutlichen Sie dies in ihrem Diagramm.

11 Aufgabe (Beschränktheit, Abgeschlossenheit)

Skizzieren Sie die folgenden Mengen $M_1 - M_4$ und untersuchen Sie sie auf Beschränktheit und Abgeschlossenheit.

- (2) $M_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |2x+y-3| \leq 1\}$
- (3) $M_2 := \{(x, y) \in]0, \infty[\times]0, \infty[\mid |2x+y-3| \leq 1\}$
- (4) $M_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y|+x^2 \leq 1\}$
- (5) $M_4 := \{(x, y) \in]0, \infty[\times]0, \infty[\mid |y|+x^2 > 1\}$

12 Aufgabe (Verknüpfungen)

- a) In den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation seien folgende Verknüpfungen definiert:

- i) $x \circ y := y$
- ii) $x \circ y := x + y + x \cdot y$
- iii) $x \circ y := x - y$
- iv) $x \circ y := x + y + 1$

Man untersuche für die Operationen ai) – aiv), ob sie kommutativ oder assoziativ sind. Bezuglich welcher Operation existiert ein neutrales Element? Bezuglich welcher Operation ist eine Inversenbildung möglich?

- b) Es sei $\circ$ eine assoziative innere Verknüpfung auf der Menge G mit neutralem Element n . Es gelte

$$\forall x \in G : x \circ x = n$$

Zeigen Sie, dass $\circ$ kommutativ ist.

- c) Auf der Potenzmenge $\wp(M)$ einer Menge M sei für $A, B \in \wp(M)$ die *symmetrische Differenz* Δ definiert durch:

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Zeigen Sie, dass die Verknüpfung Δ die gleichen Eigenschaften wie die Addition in $\mathbb{R}$ hat.

13 Aufgabe (Matrizen)

- a) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Berechnen sie $A^3 - 3A^2 + 4 \cdot I$ und verwenden sie das Ergebnis zur Berechnung von A^{-1} .

- b) Für welche Werte von a ist die folgende Matrix invertierbar?

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & a-1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ a & -3 & 3a & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

14 Aufgabe (Abbildungen, Bild-/Urbildmenge, Isoquante)

- a) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x, y) := x \cdot y$.

- i) Berechnen Sie die Bildmengen $f(\{(2, 3), (4, 5)\})$ und $f([-2, 3] \times [2, 4])$.
- ii) Skizzieren Sie die Niveaulinie von f zum Wert 5 und das Urbild $f^{-1}([2, 5])$.

- b) Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion. A, B seien Teilmengen von X und C, D Teilmengen von Y . Beweisen Sie folgende Aussagen!

- i) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
- ii) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- iii) $f(X \setminus A) \supset f(X) \setminus f(A)$
- iv) $f^{-1}(f(A)) \supset A$
- v) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
- vi) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
- vii) $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$
- viii) $f(f^{-1}(C)) \subset C$

Begründen Sie, warum in bi), biii), biv) und bviii) nicht die Gleichheit gilt!

15 Aufgabe (Funktionen)

- a) Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Funktionen. Zeigen Sie:

- i) Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.
- ii) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.
- iii) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.
- iv) Ist f surjektiv und $g \circ f$ injektiv, so ist g injektiv.
- v) Ist $g \circ f$ surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.

vi) Sind f und g bijektiv, so ist auch $g \circ f$ bijektiv und es gilt:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

b) Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion. Die Relation $\sim$ auf X sei definiert durch

$$a \sim b \stackrel{\text{Def.}}{\iff} f(a) = f(b)$$

Untersuchen Sie, ob $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X ist.

c) Zeigen Sie, dass keine surjektive Abbildung von einer Menge X auf $\wp(X)$ existiert.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass eine surjektive Abbildung $f : X \mapsto \wp(X)$ existiert. Führen Sie dies zum Widerspruch, indem Sie die Menge $Y := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ betrachten.

16 Aufgabe (Funktionen, Injektivität, Surjektivität)

a) Wir definieren die Funktionen $f, g, h : \{0, 1, 5\} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \sqrt{3x+1}$$

$$g(x) := 1 + \frac{11}{10}x - \frac{1}{10}x^2$$

$$h(x) := \ln \left| (x-1) \cdot e - x \cdot e^2 + \frac{x(x-1)}{20} \cdot (e^4 + 5e^2 - 4e) \right|$$

Äußern Sie sich zur Aussage: «Die Funktionen f , g und h sind gleich!»

b) Untersuchen Sie folgende Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ Injektivität und Surjektivität. Berechnen Sie die Umkehrfunktion.

$$f(n) := \begin{cases} 2n-1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ durch 4 teilbar} \\ n+1 & \text{falls } n \text{ gerade und nicht durch 4 teilbar} \end{cases}$$

17 Aufgabe (Abbildungen, Bijektivität)

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Bijektivität. Berechnen Sie ggf. die Inverse.

a) $f :]-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty[$, $x \mapsto f(x) := x^2$

b) $g : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$, $x \mapsto g(x) := \frac{ax+b}{cx+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$ fest, mit $ad-bc \neq 0$).

c) $h : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto h(x) := \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1}$

d) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x_1, x_2, x_3) := (x_1 - x_2, (x_2 + x_3)^3, x_3 - x_1)$

18 Aufgabe (Geometrische Folgen und Reihen)

a) In einer geometrischen Folge mit positiven Gliedern ist das Produkt des zweiten und vierten Glieds gleich 1296, das fünfte Glied ist 16. Berechnen Sie die Summe der ersten 10 Glieder.

b) Die Summe aus den ersten fünf Gliedern einer geometrischen Folge mit $q=0,8$ hat den Wert 420,2. Berechnen Sie das Bildungsgesetz der Folge!

- c) Die Summe der geraden Glieder einer geometrischen Folge von 5 rationalen Zahlen beträgt $\frac{5}{2}$, die der ungeraden Glieder $\frac{21}{4}$. Wie lauten die einzelnen Glieder?
- d) Die Mathematik-Vorlesung einer renommierten deutschen Universität wurde in der dritten bzw. achten Vorlesungswoche von 411 bzw. 353 Studenten besucht.
- i) Um wieviel Prozent nimmt der Besuch der Vorlesung wöchentlich ab, wenn man von einer konstanten wöchentlichen Abnahmerate ausgeht?
 - ii) Nachdem der Fachbereich im nächsten Semester für eifrigen Vorlesungsbesuch einen Preis ausgesetzt hat und keine Mathematik-Scheine von anderen Universitäten mehr anerkennt, sinkt die wöchentliche Abnahmerate des Vorlesungsbesuchs auf 1 Prozent. In welcher Woche kann nun der insgesamt 5000. Vorlesungsbesucher mit der „goldenen Schindel“ ausgezeichnet werden, wenn in der 1. Woche 500 Hörer die Vorlesung besucht haben?

19 Aufgabe (Gemischte Zinsrechnung)

Gegeben sei ein nomineller Jahreszinssatz $i = 8\%$ bei vierteljährlichem Zinszuschlag am 1.1., 1.4., 1.7. und 1.10.

- a) Welchen Wert hat eine am 1.1. ergangene Zahlung zum nächsten Zinszuschlagstermin (ZZT) bzw. am Jahresende?
- b) Welchen Wert hat eine am 1.2. getätigte Zahlung von 1.000 € zum nächsten ZZT bzw. am Ende des Jahres?
- c) Welchen Wert hat eine am 15.2. getätigte Einzahlung von 200 € zum nächsten ZZT bzw. am Ende des Jahres?
- d) Welchen Gesamtwert haben drei Zahlungen zu je 500 €, die am 1.1., 1.2. und am 1.3. geleistet werden, am 1.4. bzw. am Ende des Jahres?
- e) Welchen Gesamtwert haben vier Zahlungen in Höhe von jeweils 1.000 €, eingezahlt am 1.1., am 1.4., am 1.7. und am 1.10. eines Jahres, am Jahresende?
- f) Welchen Gesamtwert haben zwölf Zahlungen in Höhe von jeweils 400 €, die am Anfang eines jeden Monats, beginnend mit dem 1.1. geleistet werden, zum Ende des Jahres?

Hinweis: Zeichnen Sie zur übersichtlichen Darstellung jeweils einen Zeitstrahl.

20 Aufgabe (Rentenrechnung, unterjährige Zahlungen)

Bei einem nominellen Jahreszinssatz von 8% p.a. seien 12 Zahlungen à 1.000 € gegeben. Berechnen Sie jeweils den „Endwert“ dieser Zahlungsreihe unter folgenden Bedingungen:

- a) jährliche Zahlungen, jährlicher Zinszuschlag
- b) vierteljährliche Zahlungen, jährlicher Zinszuschlag
- c) jährliche Zahlungen, vierteljährlicher Zinszuschlag
- d) vierteljährliche Zahlungen, vierteljährlicher Zinszuschlag.

21 Aufgabe (Zinseszinsrechnung)

Zum Kauf eines Wagens hat Herr Fix&Fertig 50.000 € am 1.1.2004 angelegt³. Zu Beginn jedes folgenden Jahres zahlt Herr Fix&Fertig zunächst regelmäßig weitere 5.000 € ein. Vom 1.1.2014 an hebt Herr Fix&Fertig dagegen fortlaufend jährlich 10.000 € ab. Der Zinssatz beträgt 4% p.a. bei jährlichem ZZ am 1.1. Wie hoch ist am 1.1.2019 nach der letzten Abhebung das Restkapital, das Herr Fix&Fertig noch zum Kauf eines Wagens investieren kann?

22 Aufgabe (Interner Zinssatz, Anleihen, Kursrechnung)

Gegeben sei eine 8%-Anleihe mit Nennwert und Rückzahlungskurs 100 €, einer Laufzeit von zwei Jahren und jährlichen Zinszahlungen.

- a) Berechnen Sie den Kurs der Anleihe, wenn bei jährlichem Zinszuschlag der Marktzins
 - i) 9% p.a.
 - ii) 1,5% p.a.beträgt.
- b) Berechnen Sie die Rendite der Anleihe, wenn der Kurs 101,81 € beträgt.
- c) Berechnen Sie die Rendite der Anleihe bei einem Kurs von 101,81 €, wenn die Laufzeit 4 statt bisher 2 Jahre und der Rückzahlungskurs nur noch 99 € beträgt.

23 Aufgabe (Rentenrechnung, unterjährige Zahlungen)

Die Peanuts-Bank, Ableger einer bekannten deutschen Bank, macht folgendes Angebot: „Sichern Sie sich Ihre zusätzliche monatliche Rente. Einzahlungskapital 50.000 €, Auszahlungsdauer 10 Jahre, Zinssatz 5% p.a.“

Wie hoch wird diese monatliche Rente ausfallen, wenn die Rentenzahlungen einen Monat nach Einzahlung der 50.000 € beginnen und

- a) nur die Zinsen ausgeschüttet werden (am Ende der Laufzeit beträgt das Kapital 50.000 €)?
- b) das gesamte angelegte Kapital vollständig ausgeschüttet wird, d.h. am Ende der Laufzeit beträgt das Kapital 0 €.

24 Aufgabe (Rentenrechnung)

Welche der folgenden vier Zahlungsreihen, die alle im selben Jahr beginnen, besitzt den größten Wert bei einem gegebenen nominellen Jahreszinssatz von 5%?

- a) 7 Jahre lang monatlich 150 € jeweils am Monatsende, ZZT jährlich am 1.1.
- b) 5 Zahlungen jeweils am 31.12. eines Jahres, beginnend mit 1.500 € am Ende des ersten Jahres, jedes Jahr um 500 € zunehmend, ZZT jährlich am 1.1.
- c) 4 Zahlungen jeweils am 1.1. eines Jahres, beginnend mit 3.000 € am Anfang des ersten Jahres, jedes Jahr um 5% abnehmend, ZZT jährlich am 1.1.
- d) Ein Jahr lang 52 wöchentliche Zahlungen à 200 €, ZZT halbjährlich am 1.1. und 1.7.

Hinweis: Gehen Sie vereinfachend davon aus, dass ein Jahr aus exakt 52 Wochen besteht.

³Examen Allg. BWL, SS 93/94, mod.

25 Aufgabe (arithmetische und geometrische Rente)

- a) Playboy Lukas Elreib hat drei Freundinnen, Aline, Janine und Nadine, die alle für ihn sehr kostspielig sind. Adeline reist gerne in der Welt herum, was Lukas Elreib pro Jahr 15.000 € kosten würde. Janine bevorzugt Goldschmuck. Im ersten Jahr müsste er hierfür 11.000 € ausgeben. Wegen des steigenden Goldpreises aber, muss er damit rechnen, dass seine Ausgaben für Goldschmuck jährlich um 8% steigen würden. Nadine will dagegen ein neues Auto. Die Finanzierung durch einen Autokredit kostet im ersten Jahr 23.000 €. Nach jedem Jahr verringert sich der zurückzuzahlende Betrag um 3.000 €. Da aber das Unternehmen FABS, in dem fast sein gesamtes Vermögen steckt, in Konkurs gegangen ist, muss er sich nun für die nächste Zeit (7 Jahre) für eine Freundin entscheiden. Nehmen Sie an, dass er alle drei gleichermaßen liebt und somit die Freundin wählt, die ihn am wenigsten kostet. Für welche Freundin wird er sich entscheiden, wenn man einen Zinssatz von 4% p.a. zugrundelegt?
- b) Der Student M.E. Tapfer realisiert, dass er allein mit sicherem Auftreten⁴ keine Chance hat, die bevorstehende Klausur des anspruchsvollen Dr. Lukas Schlendrian zu bestehen. Aufgrund dieser ernüchternden Erkenntnis greift er auf sein praxisrelevantes BWL-Wissen zurück und schlussfolgert, dass sein Dozent, bekannt für seinen ausschweifenden und monetär intensiven Lebensstil, sicherlich für einen Akt »akademischer Landschaftspflege« offen ist! Nun bleibt für ihn lediglich die Frage zu klären, welchen Preis die ersehnte 4.0 fordern wird. Da Tapfer jedoch über keinerlei nennenswertes finanzmathematisches Wissen verfügt, muss er sich mit seinen Überlegungen an kompetente Kommilitonen wenden. Helfen Sie Tapfer, die Minimalkosten dieser »Drittmittel« finanzmathematisch korrekt zu ermitteln! Rechnen Sie dabei mit einem Kalkulationszinssatz von 5% p.a. bei jährlichem Zinszuschlag und gehen Sie von folgenden Annahmen aus:
- Die »Pflegeleistung« findet zum 01.02.2018 statt und wird unmittelbar aufgedeckt, da plötzlich der verurteilende Blick Dr. Schlendrians den Studenten während der Vorlesung verschont.
 - Dr. Schlendrian entgeht in der Folge sein Gehalt, welches Tapfer auf 5.000 € monatlich schätzt. Das geplante Ende seiner Universitätskarriere war der 01.08.2019.
 - Schlendrian erleidet in der Folge zudem einen alle 2 Monate anfallenden Prestigeverlust, der sich monetär mit 10.000 € beziffern lässt. Dieser reduziert sich mit jeder Zahlung um 2.000 €.
- c) Nach großen Forschungserfolgen und unter Berücksichtigung der Herausforderungen der Zukunft beschließt die Universität des Saarlandes, einen Sonderforschungsbereich Agrarwissenschaften einzurichten. Als erstes großes Projekt nimmt man das Klonen des sogenannten $1\frac{1}{2}$ -Eier-Huhns in Angriff, dessen Züchtung seit Jahren weltweites Interesse hervorruft. Dem Züchter, Dr. Schindluder, wird bei Verkauf seiner Rechte eine 10-jährige Rente von anfangs 10.000 € angeboten, die sich jährlich um 5% steigern soll. Das Max-Planck-Institut für Geflügel-Wissenschaften bietet Dr. Schindluder für den Verkauf seiner Rechte monatliche Zahlungen von 1000 € (jeweils am Monatsende) an, wobei

⁴Sein Spitzname unter Kommilitonen ist folgerichtig »Der tapfere Schneider«!

die monatlichen Zahlungen nach jedem Jahr um 100 € erhöht werden, und das über 8 Jahre hinweg.

Wahlweise könnte Dr. Schindluder das Huhn auch selbst weiterzüchten und vermarkten. In diesem Fall hat er mit einer einmaligen Investition von 6500 € zu rechnen und jährlichen Erlösen in Höhe von 25.000 € über einen Zeitraum von 5 Jahren.

Wie wird sich Dr. Schindluder entscheiden, wenn man einen Zinssatz von 6,4% p.a. zugrundelegt?

26 Aufgabe (effektiver Zinssatz, unterjährige Zahlungen)

- Ein am 01.01. aufgenommenes Darlehen in Höhe von 1.000 € wird in vierteljährlichen Raten von 150 € über den Zeitraum von zwei Jahren getilgt. Wie hoch ist der effektive Jahreszinssatz?
- Jemand legt ein Kapital der Höhe K vom 1.1. bis zum Jahresende an. Berechnen Sie den effektiven Jahreszins, wenn bei monatlichem Zinszuschlag ein Monatszinssatz i_M vereinbart ist. Ändert sich das Ergebnis, wenn der Einzahlungszeitpunkt der 1.2., 1.3. usw. ist? Ermitteln Sie eine Formel für den effektiven Jahreszins in Abhängigkeit von der Zahl der Anlagemonate und vergleichen Sie diese mit der in der Literatur häufig zu findenden Effektivzinsformel

$$i_{\text{eff}} = (1 + i_M)^{12} - 1 .$$

Hinweis: Man verwende Aufgabe 4 h)!

27 Aufgabe (Folgen, Grenzwerte)

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+a} - \sqrt{n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n$

28 Aufgabe (Stetigkeit)

- Berechnen Sie a, b , so dass die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{für } x \leq -2 \\ ax + b & \text{für } -2 < x < 2 \\ \sqrt{x} & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

stetig ist. Skizzieren Sie den Graphen von f .

- In welchen Punkten ist folgende Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig? Hierbei sei

$$g(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 2 - x & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass es zu jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Folge rationaler Zahlen $(x_n)_{n=1}^\infty$ und eine Folge irrationaler Zahlen $(\tilde{x}_n)_{n=1}^\infty$ gibt, mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n = x_0 .$$

c) Die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$h(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } x = y = 0 \end{cases}$$

- i) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} h(x, y) \right)$ und $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} h(x, y) \right)$.
 ii) Untersuchen Sie h auf Stetigkeit.

29 Aufgabe (Differentialrechnung)

Berechnen Sie für folgende Funktionsvorschriften $x \mapsto f(x)$ jeweils den maximalen Definitionsbereich und die Ableitung.

a) $f(x) := \ln(\ln(x))$

b) $f(x) := x^x$

c) $f(x) := x^{\ln(x)}$

d) $f(x) := \ln(x)^x$

e) $f(x) := \ln(x)^{\ln(x)}$

f) $\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ **Bemerkung:** Φ heißt Standardnormalverteilung!

30 Aufgabe (Ableitung der Umkehrfunktion)

Gegeben seien die trigonometrischen Funktionen $\sin$, $\cos$, $\tan$ und $\cot$.

- a) Skizzieren Sie diese Funktionen.
 b) Schränken Sie jede Funktion auf einen möglichst großen Definitionsbereich ein, so dass die Einschränkung bijektiv ist (Beweis!).
 c) Berechnen Sie die Ableitung der zugehörigen Umkehrfunktionen $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$ und arccot . **Hinweis:** Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion!

31 Aufgabe (Kurvendiskussion)

Skizzieren Sie für $\ell=4, 5, 6$ die Funktionen $x \mapsto s_\ell(x)$ und $x \mapsto t_\ell(x)$! Hierbei bezeichnen s_ℓ und t_ℓ die Rentenendwertfaktoren aus Definition 4.36 der Vorlesung. Nennen Sie charakteristische Eigenschaften von s_ℓ und t_ℓ .

32 Aufgabe (Elastizität, Ableitungsregeln)

- a) Zeigen Sie mit Hilfe der „klassischen“ Ableitungsregeln folgende Rechenregeln für die Elastizität ϵ zweier differenzierbarer Funktionen f und g mit $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$:
- i) $\epsilon_{\lambda f}(x) = \epsilon_f(x)$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ konstant
 - ii) $\epsilon_{f\lambda}(x) = \lambda \cdot \epsilon_f(x)$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ konstant
 - iii) $\epsilon_{f \cdot g}(x) = \epsilon_f(x) + \epsilon_g(x)$

- b) Berechnen Sie die Elastizität der Funktion $f(x) = \frac{3x+1}{(x+5)^2} \cdot e^{3x^2}$ und interpretieren Sie anschließend die Elastizität an der Stelle $x_0 = 2$.

Hinweis: Die Logarithmische Ableitungsregel $f'(x) = f(x) \cdot [\ln(f(x))]'$ verwenden!

33 Aufgabe (Homogenität, Elastizität)

- a) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ homogen vom Grad r , d.h. es gilt $f(\lambda \cdot \mathbf{x}) = \lambda^r \cdot f(\mathbf{x})$ für alle $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass dann $f' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ homogen vom Grad $r-1$ ist.
- b) Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei homogen vom Grad r , d.h. es gilt für alle $\lambda > 0$:

$$(*) \quad f(\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots, \lambda \cdot x_n) = \lambda^r \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n) .$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

i) $\sum_{\ell=1}^n x_\ell \cdot D_\ell f(x_1, \dots, x_n) = r \cdot f(x_1, \dots, x_n)$ (Eulersche Homogenitätsrelation)

Hinweis: Man differenziere Gleichung $(*)$ nach λ und setze anschließend $\lambda=1$

- ii) Die Summe aller partiellen Elastizitäten ist gleich r .
- iii) Berechnen Sie $x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} + z \frac{\partial g}{\partial z}$ für die Funktion $g(x, y, z) := \left(\frac{x-y+z}{x+y-z} \right)^\alpha$.

34 Aufgabe (Definitheit)

Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & t \\ 1 & 4 & 2 \\ t & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} -2 & 0 & t \\ 0 & -4 & s \\ t & s & -4 \end{pmatrix} .$$

- a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A positiv definit?
- b) Für welche $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, ist die Matrix B negativ definit?

35 Aufgabe (Optimierung, Lagrangesche Multiplikatorenregel)

Gegeben seien die Mengen

$$\mathbb{D}_1 = \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y-x| \leq 2\}$$

$$\mathbb{D}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 2\}$$

- a) Zeichnen Sie die Mengen $\mathbb{D}_2$ und $\mathbb{D}_3$ und untersuchen Sie, ob die Mengen abgeschlossen, beschränkt oder kompakt sind.
- b) Die Funktion f sei definiert durch

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2 - 7y + 10 .$$

Bestimmen Sie jeweils alle globalen Extrema von f auf den Mengen $\mathbb{D}_i$ ($i = 1, 2, 3$).

- c) Hühnerbaron Egon E. will in der Pfalz eine Eierfabrik errichten (Saarbrücker Zeitung: „1,2 Millionen Hühner für die Pfalz“ ) , da das Saarland für die geplanten Dimensionen zu klein ist. Die Stabsstelle „Planung, Strategie und Huhnforschung“ seines Hühnerimperiums hat die Ermittlung der Eier-Produktionsfunktion der geplanten Eierfabrik

beim renommierten Max-Planck-Institut für Geflügel-Wissenschaften an der Universität des Saarlandes in Auftrag gegeben. Dieses Institut kann größere Forschungserfolge vorweisen, z.B. das legendäre $1\frac{1}{2}$ -Eier-Huhn⁵, zumal es gerade einen Sonderforschungsbereich unter der Schirmherrschaft des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Schließungskompetenz auf diesem Sachgebiet ins Leben gerufen hat.

Der weit über die Landesgrenzen hinaus bekannte Hühnerexperte und Institutsleiter Dr. K. Schindluder (siehe z.B. das Satiremagazin Titanic ) präsentiert nach dreimonatiger Arbeit für den Eieroutput folgende Produktionsfunktion E :

$$E(x_1, x_2, x_3) = x_1^{0,5} x_2^{0,3} x_3^{0,4}$$

x_1 bezeichnet die Größe der Legebatterie eines Huhnes in Flächeneinheiten (FE), x_2 die Anzahl der Mengeneinheiten (ME) Körner und x_3 die Menge an Wasser, gemessen in Volumeneinheiten (VE). Eine FE kostet 4 Währungseinheiten (WE), eine ME Körner kostet 1 WE und eine VE Wasser 2 WE. Insgesamt stehen 480 WE zur Verfügung.

- i) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:
 - „Je mehr Platz ein Huhn in der Legebatterie hat, desto unproduktiver ist es, da es mehr Energie beim Herumlaufen verschwendet und daher weniger Eier legt.“
 - „Vergrößert man die Legebatterie eines Huhnes, so nimmt der Eieroutput überproportional zu.“
- ii) Ermitteln Sie für einen maximalen Eieroutput die optimalen Einsatzmengen an Körnern und Wasser, sowie die optimale Größe der Legebatterie.
- d) Einer/m Studierenden stehen ein Mathematik- sowie ein BWL-Repetitorium zur Vorbereitung auf die Klausuren zur Verfügung. Eine Stunde Mathematik kostet 36 Taler (ist jedoch weitaus mehr wert). Eine Stunde BWL hingegen 18 Taler. Durch welche Allokation lässt sich der Nutzen des/r Studierenden maximieren, wenn diese/r über 540 Taler und unbegrenzte Freizeit verfügt? Die Person verfolgt folgende Nutzenfunktion:

$$u(x_1, x_2) := ax_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{3}{2}}$$

Dabei steht a für eine Konstante und x_1 bzw. x_2 für die Zahl der Mathematik- bzw. BWL-Stunden.

36 Aufgabe (Optimierung in einer Veränderlichen)

- a) Die Preisabsatzfunktion p und die Kostenfunktion K eines Unternehmens seien bei einer Ausbringungsmenge $x \geq 0$

$$p(x) = \max \left\{ 0, \min \left\{ 100 - x, 50 - \frac{1}{4}x \right\} \right\} \quad \text{und} \quad K(x) = \frac{1}{4}x^2.$$

- i) Bestimmen Sie die Erlös- und die Gewinnfunktion.
- ii) Bestimmen Sie die gewinnmaximale Ausbringungsmenge.

⁵Dieses besitzt gentechnisch bedingt drei Beine, was für den durchschnittlichen deutschen 3-Personenhaushalt ebenfalls von großem Vorteil ist!

- b) Autoren von wissenschaftlichen Lehrbüchern erhalten in der Regel einen festen Prozentsatz vom Verkaufserlös ihres Buches als Honorar vom Verlag.
Zeigen Sie, dass bei affin-linearer Preisabsatzfunktion für das betreffende Werk und Gewinnmaximierung des Verlags, dieser stets eine geringere Auflage zu höherem Preis verkaufen möchte als der Autor, falls dieser Honorarmaximierung anstrebt. Gehen Sie dabei davon aus, dass die für den Verlag neben dem Honorar anfallenden Kosten ebenfalls affin-linear sind.

37 Aufgabe (Optimierung)

- a) Rollt man einen Kreissektor zusammen, entsteht ein Kreiskegel. Für welchen Winkel des Kreissektors entsteht ein Kegel mit maximalem Volumen? In welchem Verhältnis steht die zugehörige Mantelfläche zur Kreisfläche?
- b) Aus einem Dreieck soll parallel zur Grundlinie ein Rechteck ausgeschnitten und zu einem Zylinder mit größtem Inhalt gerollt werden. In welchem Verhältnis stehen Dreiecksfläche und Zylindermantel?⁶
- c) Es sollen zylindrische Literdosen hergestellt werden. Wie sind die Ausmaße zu wählen, wenn dabei möglichst wenig Blech verbraucht werden soll? (Falzränder und Lötstreifen werden nicht berücksichtigt.) Wie ändert sich das Ergebnis, wenn die kreisförmigen Deckel
- i) aus dem umschriebenen Quadrat
 - ii) aus dem umschriebenen regelmäßigen Sechseck
- ausgestanzt werden und der Abfall beim Ausstanzen der Grundflächen zum verbrauchten Material zählt?⁷

38 Aufgabe (Integral, Stammfunktion)

- a) Bringen Sie die Aussage

„Ist der Integrand eine positive Funktion, so ist das Integral ebenfalls positiv.“

und die Rechnung

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2$$

in Einklang.

- b) Helle Aufregung in Mathematikerkreisen! Es drohen Chaos und Anarchie seit kürzlich die Professoren Klaus Hahne und Christian Büchen folgenden Beweis einer oft befürchteten, aber bis dahin für unmöglich gehaltenen Tatsache vorlegten:

$$\int \frac{dx}{x} = \int 1 \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \frac{1}{x} - \int x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx \implies \int \frac{dx}{x} = 1 + \int \frac{dx}{x} \implies 0 = 1$$

Wer weiß Rat und rettet die Mathematik?

⁶Abitur 1927

⁷Abitur 1952

- c) Sei $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit den Eigenschaften:

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'(1) = 3, \quad f(1) = 5$$

Welchen Wert hat $f(e)$? (Begründung!)

39 Aufgabe (Stammfunktionen)

Untersuchen Sie, ob F eine Stammfunktion von f ist:

a) $f(x) = 2x e^{2x}$, $F(x) = x e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x}$

b) $f(x) = x\sqrt{a^2+x^2}$, $F(x) = \frac{1}{3}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}$

c) $f(x) = \frac{4x+5}{2x^2+5x-3}$, $F(x) = \ln|2x^2+5x-3| + 12$

d) $f(x) = \frac{x}{2x^2+5x-3}$, $F(x) = \frac{3}{7} \ln|x+3| + \frac{1}{14} \ln|2x-1|$

e) $f(x) = \frac{2x^2+5x-3}{x+1}$, $F(x) = x^2 + 3x - 6 \ln|x+1| + 7$

f) $f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{2x-1}}$,

$$F(x) = \frac{1}{1-x} + \ln|x-1| + \frac{1}{\sqrt{2x-1}-1} - \ln|\sqrt{2x-1}-1| + \frac{1}{\sqrt{2x-1}+1} + \ln|\sqrt{2x-1}+1|$$

40 Aufgabe (Abitur 1970)

- a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = bx\sqrt{16-x^2}$ mit $b > 0$.
- Bestimmen Sie Definitionsbereich, Symmetrieeigenschaften, Nullstellen und Extremwerte der Funktion f und geben Sie an, in welchem Bereich f differenzierbar ist.
 - Welcher Bedingung muss b genügen, damit im ganzen Definitionsbereich $|f(x)| \leq 1$ gilt? Skizzieren Sie für den größten Wert b , der jener Bedingung genügt, die zu f gehörige Kurve.
- b) Gegeben ist die Funktion $g(x) = \cos(x)$.
- Weshalb muss man den Definitionsbereich von g einschränken, um eine Umkehrfunktion bilden zu können?
 - Zeigen Sie, dass g auf dem Intervall $[0, \pi]$ invertierbar ist. Berechnen Sie den Wertebereich der Umkehrfunktion $h(x) = \arccos(x)$ und skizzieren Sie h .
- c) Wir betrachten nun die Funktion $k(x) = \arccos\left(\frac{x}{8}\sqrt{16-x^2}\right)$
- Bestimmen Sie mit Hilfe der in Teil a) gefertigten Kurven den Definitions- und Wertebereich der Funktion k .
 - Berechnen Sie die Ableitung von k mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion. In welchen Punkten im Inneren ihres Definitionsbereiches besitzt k keine Ableitung? Untersuchen Sie das Verhalten von k' bei links- und rechtsseitiger Annäherung an solch einen Punkt. Welche Besonderheit muss demnach das Bild der Funktion k an dieser Stelle zeigen? Skizzieren Sie k !

41 Aufgabe (Abitur 1971)

Gegeben seien die Funktionen $f, g : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit den Funktionsvorschriften $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ und $g(x) = e^x - 1$.

- a) Jede Gerade der Parallelenschar $y = t$ mit $t \geq 0$ schneidet f in einem Punkt T_1 und g in einem Punkt T_2 . Für welche Gerade der Schar hat die Länge der Strecke $\overline{T_1 T_2}$ ein relatives Maximum?
- b) Berechnen Sie eine Stammfunktion von f .
Hinweis: Substitution $z = \sqrt{e^x - 1}$ und anschließende Partialbruchzerlegung. Man berechne vorher die Ableitung der arctan-Funktion mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion.
- c) Die Graphen von f und g schließen ein endliches Flächenstück ein. Welchen Inhalt besitzt es?

42 Aufgabe (Abitur 1972)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Funktionsvorschrift $f(x) = 2|x| \cdot e^{\frac{1}{2}x}$.

- a)
 - i) Untersuchen Sie f im Punkt $x = 0$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit und berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$!
 - ii) Berechnen Sie alle relativen und absoluten Extrema von f !
 - iii) Berechnen Sie den Wertebereich von f und skizzieren Sie den Graphen.
- b) Sei $P = (x^*, y^*)$ ein Punkt des Graphen von f mit $x^* < -2$. Die Tangente T an den Graphen von f im Punkt P schneide die x -Achse im Punkt $S = (s, 0)$.
 - i) Stellen Sie die Tangentengleichung auf und berechnen Sie S als Funktion von x^* .
 - ii) Für welchen Wert von x^* liegt der Punkt S dem Koordinatenursprung am nächsten? Weisen Sie nach, dass in diesem Fall der Punkt P ein Wendepunkt des Graphen von f ist.

43 Aufgabe (Abitur 1973)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$.

- a)
 - i) Welchen Definitionsbereich hat diese Funktion? Welches Verhalten zeigt sie für $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow 1$ und für $x \rightarrow +\infty$?
 - ii) Untersuchen Sie, ob f Extremwerte besitzt. Welchen Wertebereich hat die Funktion?
 - iii) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.
- b)
 - i) Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Integralfunktion

$$I(x) = \int_e^x \frac{dt}{t \ln(t)}$$

- ii) Beweisen Sie, dass I streng monoton ist. Für welchen Wert von x^* gilt $I(x^*) = 0$? In welchem Teil des Definitionsbereiches ist I positiv, in welchem negativ? Die Antworten sind ohne Durchführung der Integration zu begründen.

iii) Berechnen Sie nun das unbestimmte Integral $\int \frac{dx}{x \ln(x)}$ und stellen Sie mit Hilfe des Ergebnisses die Funktion $I(x)$ dar.

iv) In welchem Bereich ist

$$K(x) = \int_{e^{-1}}^x \frac{dt}{t \ln(t)}$$

definiert? Warum hat der Graph von K bei $x=e^{-1}$ einen Wendepunkt? Begründen Sie anhand der Skizze der Teilaufgabe aiii), dass $K(e^{-2}) > 0$ gilt. Berechnen Sie $K(e^{-2})$.